ББК 22.161
Я 47
УДК 517(075.8)

Издание осуществлено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки»

Рецензенты:
член-корреспондент РАН *О. В. Бесов*
член-корреспондент РАН *Е. И. Моисеев*

ЯКОВЛЕВ Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов.—М.: Издательство физико-математической литературы, 2001.—480 с.—ISBN 5-94052-038-3.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемых автором студентам второго курса в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Для студентов физических, математических и инженерных специальностей.

ISBN 5-94052-038-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций по математическому анализу, читаемых автором студентам второго курса Московского физико-технического института. Оно представляет собой вторую часть двухгодичного курса и состоит из восьми глав, нумерация которых продолжает нумерацию глав первой части.

Глава 10 посвящена неявным функциям, определяемым одним или несколькими уравнениями, дифференцируемым отображениям, в частности, доказываются теорема о существовании обратного отображения и теорема о локальном расщеплении непрерывно дифференцируемого отображения на простые, каждое из которых меняет только одну из координат. Здесь же рассматриваются зависимые и независимые системы функций, а также поверхности и k-мерные многообразия в n-мерном пространстве. В конце главы изучаются локальные и условные экстремумы функций многих переменных, в частности, доказываются необходимые и достаточные условия для максимумов и минимумов.

В главе 11 изучаются интегрируемые по Риману функции многих переменных. Доказывается критерий интегрируемости. Отмечается особая роль разбиений, мелкость которых стремится к нулю, и на их основе доказываются основные свойства интегрируемых функций и простых интегралов: линейность, монотонность, аддитивность, теорема о среднем и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Доказываются теорема о сведении кратного интеграла к повторному, теорема о мере образа при дифференцируемом отображении и на ее основе теорема о замене переменных интегрирования в кратном интеграле. Здесь же изучаются несобственные кратные интегралы. В качестве приема применения кратных интегралов рассматриваются интегралы от функций по поверхностям в $\mathbb{R}^3$. Кроме того, рассматриваются мера k-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$ и интегралы от функций по таким поверхностям.

Глава 12 содержит вывод основных интегральных формул для функций многих переменных: формулы Грина на плоскости для областей с кусочно-гладкими границами, формулы Стокса в $\mathbb{R}^3$ для гладких и кусочно-гладких поверхностей и формулы Остроградского–Гаусса в $\mathbb{R}^3$ для областей с гладкими и кусочно-гладкими границами. В конце рассматриваются интегралы от дифференциальных форм и общая формула Стокса.

В главе 13 излагаются некоторые сведения из векторного анализа и теории поля, в частности, рассматриваются дифференци-

альные операторы grad, rot и div и их связь с дифференциальными формами в $\mathbb{R}^3$. В конце главы выводятся некоторые уравнения математической физики: уравнение теплопроводности, уравнение неразрывности и гидродинамические уравнения Эйлера.

Глава 14 посвящена рядам Фурье, в основном тригонометрическим. Доказываются признаки Липшица, Дини и Дирихле поточечной и равномерной сходимости тригонометрических рядов. Здесь же доказываются теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами. В конце главы рассматриваются ряды Фурье по ортогональным системам в пространстве интегрируемых с квадратом функций.

В главе 15 изучаются свойства собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра. Много внимания уделяется свойствам интеграла Фурье и преобразований Фурье как в одномерном, так и в многомерном случаях. Здесь же рассматривается свертка функций.

В главе 16 рассмотрены некоторые методы получения асимптотических оценок. Здесь получены главные члены асимптотик интегралов Лапласа и Фурье. В частности, рассмотрен метод стационарной фазы.

Последняя глава 17 является некоторым введением в функциональный анализ. Здесь рассматриваются метрические, нормированные и гильбертовы пространства и операторы в этих пространствах. В конце главы рассмотрены пространства обобщенных функций.

Как уже сказано в предисловии к первой части «Лекций...», данное пособие предназначено студентам технических вузов с расширенной программой по математике. Оно может быть использовано и для самостоятельного изучения некоторых вопросов математического анализа.

В заключение хочу поблагодарить всех сотрудников кафедры высшей математики Московского физико-технического института. Общение с ними во многом определило содержание и стиль изложения данного пособия. Особо хочу поблагодарить моих студентов. Читать лекции таким понимающим и заинтересованным слушателям — большое удовольствие и большая честь.

Издание настоящего пособия оказалось возможным благодаря поддержке Федеральной целевой программе «Интеграция». Этой программе и издательству «Физматлит» автор выражает глубокую благодарность.

Глава 10

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ЭКСТРЕМУМЫ

§ 1. Неявные функции

1.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

с двумя переменными x и y и выясним условия, при которых оно определяет одну из переменных как функцию другой.

В общем случае график уравнения (1), т.е. множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), может быть совершенно произвольным. В частности, оно может быть пустым. В дальнейшем будем предполагать, что это множество непустое, т.е. имеет хотя бы одну точку $M_0(x_0, y_0)$. В этом случае укажем условия, при которых часть графика уравнения (1), лежащая в некоторой окрестности точки M_0, есть график некоторой функции $y = f(x)$ или $x = g(y)$.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *неявной функцией, определяемой уравнением* $F(x, y) = 0$, если $F(x, f(x)) = 0$ для любого $x \in D_f$. (Здесь, как обычно, D_f — область определения функции f.)

Пример 1. Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Оно неявно определяет, как минимум, две непрерывные функции

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1; 1].$$

Кроме них существует бесчисленное множество других неявных функций, определяемых этим уравнением. А именно, для любого множества $X \subset [-1; 1]$, функция

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \in X, \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x \notin X, \end{cases}$$

является неявной функцией, определяемой данным уравнением.

Докажем теорему *о существовании и единственности неявной функции*, определяемой заданным уравнением.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0), и пусть $F(x_0, y_0) = 0$. Тогда, если $F(x, y)$ при каждом фиксированном x строго монотонна по y, то у точек x_0 и y_0 существуют окрестности Δ и $(a; b)$ такие, что на множестве $\Delta \times (a; b)$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную неявную функцию $y = f(x)$, $x \in \Delta$, и эта функция f непрерывна на Δ.*

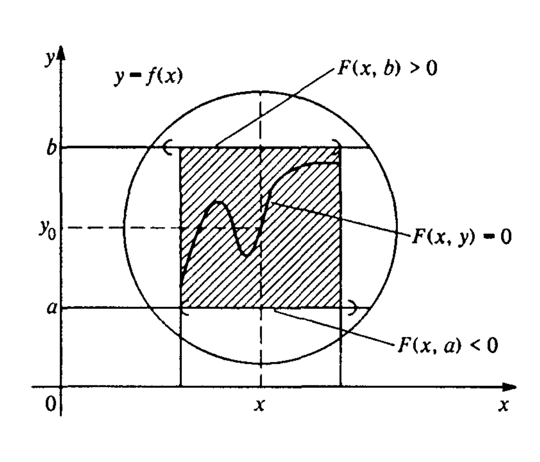


Рис. 10.1

Доказательство. По условию функция $F(x_0, y)$ строго монотонна и равна нулю при y_0. Пусть, для определенности, она строго возрастает. Тогда $F(x_0, y) > 0$ для всех допустимых $y > y_0$ и $F(x_0, y) < 0$ для всех допустимых $y < y_0$.

Выберем некоторые a и b такие, что $a < y_0 < b$ и точки (x_0, a), (x_0, b) лежат в δ-окрестности точки $(x_0; y_0)$. Тогда

$$F(x_0, a) < 0 < F(x_0, b).$$

Функции $F(x, a)$ и $F(x, b)$ непрерывны в точке x_0, поэтому существуют окрестности Δ' и Δ'' точки x_0 такие, что (см.рис. 10.1)

$$F(x, a) < 0 \quad \forall x \in \Delta', \qquad F(x, b) > 0 \quad \forall x \in \Delta''.$$

Отсюда следует, что $F(x, a) < 0 < F(x, b)$ для любого x из интервала $\Delta = \Delta' \cap \Delta''$. А так как функция $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in \Delta$ по y непрерывна и строго монотонна, то для каждого $x \in \Delta$ существует единственное y, которое обозначим $f(x)$, такое что $f(x) \in (a; b)$ и $F(x, f(x)) = 0$. Следовательно, на прямоугольнике $\Delta \times (a; b)$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную неявную функцию $y = f(x)$. Докажем, что она непрерывна в точке x_0.

Выберем некоторую окрестность $(\alpha; \beta)$ точки y_0. Не ограничивая общности, будем считать, что $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$. Тогда точно так же, как и для интервала $(a; b)$, строится окрестность $\Delta = \Delta(\alpha; \beta)$ точки x_0 такая, что $\forall x \in \Delta \;\; f(x) \in (\alpha; \beta)$. А это и означает, что функция f непрерывна в точке x_0.

Непрерывность функции $y = f(x)$ в любой точке $x_1 \in \Delta$ следует из того, что в точке с координатами x_1 и $y_1 = f(x_1)$ выполнены все условия теоремы, поэтому согласно доказанному, у точки (x_1, y_1) существует прямоугольная окрестность, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную функцию $y = f_1(x)$, $x \in \Delta_1$, которая непрерывна в точке x_1. Очевидно, что $f_1(x) = f(x)$, $\forall x \in \Delta \cap \Delta_1$, и поэтому функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_1 \in \Delta$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть функция $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывна и имеет частную производную $F'_y(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0). Тогда, если $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то справедливы утверждения теоремы 1.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда из непрерывности функции $F'_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0) следует, что $F'_y(x, y) > 0$ в некоторой δ-окрестности этой точки, и поэтому для уравнения $F(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) выполнены все условия теоремы 1. Случай $F'_y(x_0, y_0) < 0$ рассматривается аналогично. Следствие 1 доказано.

Пример 2. Функция $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ непрерывно дифференцируема на всей плоскости, причем $F'_y = 2y \neq 0$, если $y \neq 0$. Следовательно, для любой точки (x_0, y_0) такой, что $x_0^2 + y_0^2 = 1$ и $y_0 > 0$ $(y_0 < 0)$, в верхней (соответственно, нижней) полуплоскости выполнены все условия теоремы 1. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ в каждой из этих полуплоскостей определяет по одной неявной функции: $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = \sqrt{1 - x^2}$, $\quad x \in [-1; 1]$.

Теорема 2. *Пусть функция $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывна и имеет производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$, непрерывные в точке (x_0, y_0). Тогда, если $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то имеют место утверждения теоремы 1 и, кроме того, функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{2}$$

Доказательство. В силу непрерывности производных F'_x и F'_y в точке (x_0, y_0), функция $F(x, y)$ дифференцируема в этой точке, поэтому

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, а функции α и β такие, что $\alpha \to 0$

и $\beta \to 0$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Положим здесь $y = f(x)$. Тогда $F(x, y) = F(x_0, y_0) = 0$ и, следовательно,

$$F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha}{F'_y(x_0, y_0) + \beta}.$$

Отсюда в пределе при $x \to x_0$ получаем, что функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную и справедлива формула (2). Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Если выполнены все условия теоремы 2 и, кроме того, производные F'_x и F'_y непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то неявная функция $y = f(x)$, $x \in \Delta$, имеет непрерывную производную.*

Доказательство. В теореме 1 доказано, что функция $y = f(x)$ непрерывна. Из теоремы 2 следует, что она имеет производную, причем

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad x \in \Delta.$$

Поэтому, в силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций, производная $f'(x)$ непрерывна на Δ. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Если выполнены все условия следствия 2 и, кроме того, функция $F(x, y)$ l раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0), то неявная функция $y = f(x)$ на интервале Δ имеет непрерывные производные до l-го порядка включительно.*

1.2. Неявные функции многих переменных. Доказанные выше утверждения легко обобщаются на неявные функции многих переменных $y = f(x)$, определяемых уравнением $F(x, y) = 0$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Например, формулировки и доказательства теоремы 1 и следствия 1 не меняются, если в них считать, что $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Сформулируем одно из таких утверждений.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывна и имеет частную производную $F'_y(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0). Тогда, если $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то у точек x_0 и y_0 существуют окрестности Δ и $(a; b)$ такие, что для любой точки $x \in \Delta$ уравнение $F(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y = f(x) \in (a; b)$, и функция f непрерывна на Δ.*

Аналогично, в теореме 2 и следствии 2 нужно лишь заменить производные по x на частные производные по x_i.

Теорема 2. *Пусть функция $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывна и имеет частные производные F'_{x_i} и F'_y, непрерывные в точке (x_0, y_0). Тогда, если $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то имеют место все утверждения теоремы 1 и, кроме того, функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет частную производную*

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Если, кроме того, функция $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0), то неявная функция $y = f(x)$ тоже непрерывно дифференцируема и

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Из формулы (1) следует, что если функция $F(x, y)$ l раз непрерывно дифференцируема, то функция $y = f(x)$ тоже l раз непрерывно дифференцируема.

1.3. Неявные функции, определяемые системой уравнений. В этом пункте рассмотрим неявные функции $y_j = f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, определяемые системой уравнений

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Именно, докажем теорему об однозначной разрешимости этой системы относительно $y_1, \ldots, y_m$ в некоторой окрестности точки (x^0, y^0), координаты которой $x_1^0, \ldots, x_n^0$, $y_1^0, \ldots, y_m^0$ удовлетворяют системе уравнений (1).

Прежде чем формулировать и доказывать основную теорему, выясним, не вдаваясь в детали, необходимое условие однозначной разрешимости, которое естественным образом следует из теории линейных систем.

Пусть функции $F_i(x, y)$, где $y = (y_1, \ldots, y_m)$, по переменным $y_1, \ldots, y_m$ при фиксированном x в точке $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$ дифференцируемы. Тогда

$$F_i(x, y) - F_i(x, y^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x, y^0)\Delta y_i + o(\rho)$$

при $\rho \to 0$, где $\Delta y_j = y_j - y_j^0$ и $\rho = |\Delta y|$. Пренебрегая $o(\rho)$, вместо системы (1) получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_i}(x, y^0)\Delta y_i = -F_i(x, y^0), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Она однозначно разрешима при любых правых частях тогда и только тогда, когда определитель матрицы $\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\|$ отличен от нуля. Оказывается, что это условие является достаточным для однозначной разрешимости общих систем вида (1).

Теорема 1. *Пусть функции $F_i(x,y)$ в некоторой окрестности точки (x^0,y^0) непрерывны и имеют непрерывные частные производные по y_j, $j=1,2,\ldots,m$. Тогда, если точка (x^0,y^0) удовлетворяет системе (1) и в этой точке определитель матрицы $\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\|$ отличен от нуля, то у точек x^0 и y^0 существуют окрестности Δ и Δ_m такие, что для любой точки $x\in\Delta$ система уравнений (1) относительно y имеет единственное решение $y=f(x)\in\Delta_m$, причем функции $y_j=f_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, m$, непрерывны на Δ.*

Доказательство. Через $A=\|a_{ij}\|$ обозначим матрицу, обратную к матрице $\left\|\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}(x^0,y^0)\right\|$, и вместо системы (1) рассмотрим равносильную ей систему уравнений

$$\Phi_i(x,y)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{2}$$

где $\Phi_i(x,y)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}F_j(x,y)$. Очевидно, функции $\Phi_i(x,y)$ удовлетворяют всем условиям теоремы и, более того, для них матрица $\left\|\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(x^0,y^0)\right\|$ является единичной.

Теперь для доказательства теоремы применим метод математической индукции.

Для $m=1$ теорема доказана в предыдущем пункте. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для системы из $m-1$ уравнений относительно $m-1$ переменных, и докажем, что тогда оно верно и для системы из m уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$\Phi_m(x,\widetilde{y},y_m)=0, \tag{3}$$

где $\widetilde{y}=(y_1,\ \ldots,\ y_{m-1})$, относительно переменной y_m. Оно в некоторой окрестности точки (x^0,y^0) удовлетворяет всем условиям следствия 1 из предыдущего пункта. В частности, в этой точке $\dfrac{\partial \Phi_m}{\partial y_m}=1$.

Следовательно, у точек $(x^0, \widetilde{y}^0)$ и y_m^0 существуют окрестности Δ' и $(a_m; b_m)$ такие, что для любой точки $(x, \widetilde{y}) \in \Delta'$ уравнение (3) имеет единственное решение $y_m = \varphi(x, \widetilde{y}) \in (a_m; b_m)$, причем на Δ' функция φ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по y_j, $\quad j = 1, \ldots, m-1$.

Положим
$$\Psi_i(x, \widetilde{y}) = \Phi_i(x, \widetilde{y}, \varphi(x, \widetilde{y}))$$
и рассмотрим систему уравнений
$$\Psi_i(x, \widetilde{y}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{4}$$

Она в окрестности Δ' точки $(x^0, \widetilde{y}^0)$ обладает всеми свойствами системы (2). В частности, в точке $(x^0, \widetilde{y}^0)$
$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j} = \delta_{ij},$$
где δ_{ij} — символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$. Поэтому, согласно предположению, у точек x^0 и $\widetilde{y}^0$ существуют окрестности Δ и $\widetilde{\Delta}$ такие, что для любой точки $x \in \Delta$ система уравнений (4) относительно $\widetilde{y}$ имеет единственное решение $\widetilde{y} = \widetilde{f}(x) \in \widetilde{\Delta}$, причем функции $y_j = f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, непрерывны на Δ.

Положим $\Delta_m = \widetilde{\Delta} \times (a_m; b_m)$ и $f_m(x) = \varphi(x, \widetilde{f}(x))$.

Тогда, очевидно, для любой точки $x \in \Delta$ система (2), а следовательно, и система (1) имеет единственное решение $y = f(x) \in \Delta_m$, которое непрерывно на Δ. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функции $F_i(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x^0, y^0) непрерывно дифференцируемы. Тогда, если $F_i(x^0, y^0) = 0$ и $\det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x^0, y^0) \right\| \neq 0$, то имеют место утверждения теоремы 1 и, кроме того, функции $y_j = f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы на Δ.*

Доказательство. Снова рассмотрим систему (2), равносильную системе (1), и воспользуемся методом математической индукции.

Уравнение (3) в некоторой окрестности точки (x^0, y^0) удовлетворяет всем условиям следствия 2 из предыдущего пункта, поэтому функция $y_m = \varphi(x, \widetilde{y})$ на Δ' имеет непрерывные частные производные по всем переменным.

Далее, система уравнений (4) в окрестности Δ' точки $(x^0, \hat{y}^0)$ обладает всеми свойствами системы (2). По предположению индукции, функции $y_j = f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, непрерывно дифференцируемы на Δ. Очевидно, функция $f_m(x) = \varphi(x, \widetilde{f}(x))$ тоже непрерывно дифференцируема на Δ. Теорема 2 доказана.

3 Зак. 193

Производные по x_k неявных функций, определяемых системой уравнений (1), находят из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

которые получаются дифференцированием тождеств

$$F_i(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0$$

по правилу дифференцирования сложных функций.

§ 2. Дифференцируемые отображения

2.1. Определения и основные свойства. Как известно, задание отображения $y = f(x)$ множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в m-мерное пространство $\mathbb{R}^m$ точек $y = (y_1, \ldots, y_m)$ равносильно заданию m числовых функций от n переменных

$$y_j = f_j(x), \quad x \in G, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если функции $f_j(x)$ дифференцируемы в точке x, то

$$f_j(x+h) - f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} h_i + \alpha_j \cdot |h|, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$ и $\alpha_j \to 0$ при $h \to 0$. Отсюда следует, что в этом случае

$$f(x+h) - f(x) = Df \cdot h + \alpha|h|, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, а Df — это матрица размерности $m \times n$, элементами которой являются значения производных $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ в точке x:

$$Df = \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|.$$

Эта матрица называется *матрицей Якоби системы функций* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ (или *отображения* f) *в точке* x.

Определение 1. Отображение f называется *дифференцируемым в точке* x, если оно определено в некоторой окрестности точки x и если существует линейный оператор L такой, что

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + \alpha|h|, \tag{3}$$

где $\alpha \to 0$ при $h \to 0$. В этом случае линейный оператор $L(h)$ называется *дифференциалом отображения* f *в точке* x.

Теорема. *Отображение $y = f(x)$ дифференцируемо в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы функции $y_j = f_j(x)$. В этом случае матрица дифференциала отображения f — это матрица Якоби системы функций $f_1, \ldots, f_m$ в рассматриваемой точке.*

Доказательство. Выше доказано (см. (2)), что если функции f_j дифференцируемы в точке x, то отображение f дифференцируемо в точке x, и матрица Якоби функций $f_1, \ldots, f_m$ — это матрица дифференциала отображения.

Пусть теперь отображение f дифференцируемо в точке x. Тогда, согласно определению, существует линейный оператор L, для которого справедливо соотношение (3). Очевидно, если A — матрица оператора L, $A_j = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ — j-я строка этой матрицы, а α_j — j-я координата точки α, то

$$f_j(x+h) - f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}h_i + \alpha_j|h|,$$

где $\alpha_j \to 0$ при $h \to 0$. Это и означает, что функции f_j дифференцируемы в точке x и $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = a_{ji}$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что матрица Якоби отображения $f(x)$ является аналогом производной для числовых функций, поэтому ее называют *производной отображения* f и обозначают $f'(x)$. Она обладает многими свойствами обычной производной. В частности, имеют место свойство линейности и цепное правило для производной композиции дифференцируемых отображений.

Следствие 1. *Если отображения $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то для любых чисел a и b линейная комбинация $af + bg$ тоже дифференцируема в точке x и*

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x).$$

Следствие 2. *Если отображение $y = y(x)$ дифференцируемо в точке x, а отображение $z = z(y)$ дифференцируемо в точке $y = y(x)$, то отображение $z = z(y(x))$ дифференцируемо в точке x и*

$$z'_x = z'_y \cdot y'_x. \tag{4}$$

Дифференцируемость отображения $z = z(y(x))$ следует из доказанной выше теоремы и из теоремы о дифференцируемости сложной функции.

Из формулы для производной сложной функции следует, что если отображение $y = y(x)$ действует из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, а отображение

$z = z(y)$ — из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^l$, то

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j}; \quad i = 1, 2, \ldots, l; \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

а это и означает, что матрица $z'_x = \left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right\|$ равна произведению матрицы $z'_y = \left\| \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \right\|$ на матрицу $y'_x = \left\| \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right\|$, т.е. справедлива формула (4). Следствие 2 доказано.

Определение 2. Отображение называется *дифференцируемым на множестве*, если оно дифференцируемо в каждой точке этого множества.

Очевидно, что если отображение f дифференцируемо на множестве G, то множество G — открытое.

Из доказанной теоремы следует, что если отображение $y = f(x)$, $x \in G$, такое, что множество G открытое и функции (1) непрерывно дифференцируемы на G, то f дифференцируемо.

Такие отображения называются *непрерывно дифференцируемыми*.

Определение 3. В случае $m = n$ определитель матрицы Якоби отображения $y = f(x)$ называется *определителем Якоби* или *якобианом отображения* f и обозначается $\det f'(x)$ или

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Пусть $y = f(x)$ — взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, а $x = f^{-1}(y)$ — обратное отображение, и поэтому $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in X$. Тогда, если отображение $y = f(x)$ дифференцируемо в точке x_0, а отображение $x = f^{-1}(y)$ дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$, то

$$x'_y(y_0) \cdot y'_x(x_0) = I,$$

где I — единичная матрица. Отсюда и из теоремы об определителе произведения квадратных матриц следует, что

$$\det x'_y(y_0) \cdot \det y'_x(x_0) = 1$$

или в других обозначениях

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1.$$

2.2. Теорема о существовании обратного отображения. Как известно, непрерывно дифференцируемая функция одной переменной с отличной от нуля производной на некотором промежутке имеет на этом промежутке обратную, которая тоже непрерывно дифференцируема. Для отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ имеет место аналогичное свойство, однако в случае $n > 1$ оно имеет локальный характер.

Здесь будем рассматривать только отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Задание такого отображения $y = f(x)$, $x \in G$, равносильно заданию n числовых функций от n переменных

$$y_j = f_j(x), \quad x \in G, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема. *Пусть $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда, если якобиан этого отображения не обращается в нуль в точке $x_0 \in G$, то у точек x_0 и $y_0 = f(x_0)$ существуют окрестности $O(x_0)$ и $O(y_0)$ такие, что f взаимно однозначно отображает $O(x_0)$ на $O(y_0)$, причем обратное отображение непрерывно дифференцируемо на $O(y_0)$.*

Доказательство. По теореме о неявных функциях у точек x_0 и y_0 существуют окрестности Δ и Δ' такие, что $\Delta \subset G$ и для любой точки $y \in \Delta'$ система уравнений (1) имеет единственное решение $x = g(y) \in \Delta$. Через $g(\Delta')$, как обычно, обозначим образ множества Δ' при отображении $x = g(y)$.

При непрерывном отображении f прообраз открытого множества Δ' есть открытое множество. Поэтому множество $g(\Delta')$ открытое и, очевидно, является окрестностью точки x_0, которая взаимно однозначно отображается на Δ'.

В заключение осталось заметить, что отображение $x = g(y)$ непрерывно дифференцируемо на Δ'. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $y = f(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда, если якобиан отображения f на G не обращается в нуль, то $f(G)$ — открытое множество.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку y_o множества $f(G)$. Пусть $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in G$. Тогда, в силу доказанной теоремы, у точек x_0 и y_0 существуют окрестности $O(x_0)$ и $O(y_0)$ такие, что $f(O(x_0)) = O(y_0)$, и поэтому $O(y_0) \subset f(G)$. Следовательно, любая точка множества $f(G)$ является внутренней. Следствие 1 доказано.

Его обычно формулируют следующим образом:

При непрерывно дифференцируемом отображении с отличным от нуля якобианом образ любого открытого множества есть открытое множество.

Следствие 2. *При непрерывно дифференцируемом отображении с отличным от нуля якобианом образ области есть область.*

Доказательство. Пусть отображение f удовлетворяет условиям следствия, и пусть $f(G)$ — образ области G. Выше доказано, что множество $f(G)$ открытое. Докажем, что оно связное.

Пусть y_α и y_β — некоторые точки множества $f(G)$, и пусть $y_\alpha = f(x_\alpha)$, $y_\beta = f(x_\beta)$. Точки $x_\alpha \in G$ и $x_\beta \in G$ соединим непрерывной кривой, все точки которой принадлежат области G. Тогда, если $x = x(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ — уравнение этой кривой, то, очевидно, $y = f(x(t))$, $t \in [\alpha;\beta]$, — уравнение кривой, которая соединяет точки y_α и y_β и все точки которой принадлежат множеству $f(G)$. Следовательно, множество $f(G)$ связное. Следствие 2 доказано.

Это утверждение иногда называют *принципом сохранения области.*

Из доказанных утверждений следует, что непрерывно дифференцируемое отображение с отличным от нуля якобианом является *локально взаимно однозначным.* Приведем пример, показывающий, что в общем случае нельзя утверждать, что непрерывно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $x \in G$, с отличным от нуля якобианом взаимно однозначно отображает G на $f(G)$.

Пример. Рассмотрим отображение f, которое точке $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие точку $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, у которой

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y. \tag{2}$$

Якобиан этого отображения отличен от нуля на всей плоскости:

$$\det f' = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0.$$

Следовательно, каждая точка плоскости имеет окрестность, на которой отображение (2) взаимно однозначное. Однако, как легко видеть, это отображение не является взаимно однозначным на $\mathbb{R}^2$.

Заметим, что отображение (2) можно рассматривать как функцию комплексного переменного $w = e^z$, где $z = x+iy$, $w = u+iv$. Аналогично можно рассмотреть функцию $w = z^2$.

2.3. Теорема о расщеплении непрерывно дифференцируемого отображения. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение $y = \Phi(x)$, заданное формулами

$$y_j = \varphi_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. Отображение (1) называется *простым*, если существует k такое, что $y_j = x_j$ для любого $j \neq k$ и $y_k = \varphi(x)$, т.е. если оно меняет только одну из координат.

Теорема. *Если отображение* (1) *в некоторой окрестности точки* x_0 *непрерывно дифференцируемо и в точке* x_0 *удовлетворяет условию:*

$$\det \Phi'(x_0) \neq 0, \tag{2}$$

то у точки x_0 *существует окрестность, в которой имеет место представление*

$$\Phi(x) = Bg_n(\ldots(g_2(g_1(x)))\ldots), \tag{3}$$

где B *— линейное отображение, меняющее только порядок координат, а* g_k *— простое непрерывно дифференцируемое отображение, меняющее только* k*-ю координату.*

Доказательство. Из условия (2) следует, что в первом столбце определителя $\det \Phi'(x_0)$ имеется отличный от нуля элемент. Пусть

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, согласно теореме о неявной функции, уравнение

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

относительно x_1 в некоторой окрестности точки x_0 имеет единственное решение $x_1 = \psi_1(y_i, x_2, \ldots, x_n)$. Легко видеть, что в этой окрестности точки x_0 отображение $y = \Phi(x)$ представимо следующим образом:

$$y = B_1(f_1(g_1(x))), \tag{4}$$

где отображение $\eta = g_1(x)$ меняет только первую координату по формуле $\eta_1 = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, а другие координаты не меняет, т.е. $\eta_j = x_j$, если $j \geqslant 2$. Отображение $z = f_1(\eta)$ не меняет первую координату, т.е. $z_1 = \eta_1$, а другие координаты преобразуются по формулам

$$z_i = \varphi_1(\psi_1(\eta), \eta_2, \ldots, \eta_n),$$
$$z_j = \varphi_j(\psi_1(\eta), \eta_2, \ldots, \eta_n), \quad j \neq 1, i.$$

Наконец, отображение $y = B_1 z$ меняет местами первую и i-ю координаты, если, конечно, $i \neq 1$, т.е. задано равенствами:

$$y_1 = z_i, \ y_i = z_1 \text{ и } y_j = z_j, \text{ для } j \neq 1, i.$$

Композицию отображений (4) можно записать в виде следующей схемы:

$$x = (x_1, \widetilde{x}) \xrightarrow{g_1} (\eta_1, \widetilde{x}) \xrightarrow{f_1} (\eta_1, \widetilde{\eta}) \xrightarrow{B_1} y,$$

где $\widetilde{x} = (x_2, \ldots, x_n)$, $\widetilde{\eta} = (\eta_2, \ldots, \eta_n)$. Якобиан отображения B_1 равен $+1$ или -1, а якобиан отображения g_1 равен $\dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_1}$, поэтому

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \pm \frac{\partial(\eta_2, \ldots, \eta_n)}{\partial(x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}.$$

Отсюда и из условия (2) следует, что

$$\frac{\partial(\eta_2, \ldots, \eta_n)}{\partial(x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Таким образом, отображение $\widetilde{f}_1 : \widetilde{x} \to \widetilde{\eta}$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Как и выше, доказывается, что отображение $z = f_1(\eta)$ представимо следующим образом:

$$z = B_2(f_2(g_2(\eta))),$$

где g_2 меняет только вторую координату, а f_2 не меняет первые две координаты, а B_2 меняет местами две координаты.

Таким образом,

$$y = B_1(B_2(f_2(g_2(g_1(x))))).$$

Поступая так и далее, в результате получим формулу (3). Теорема доказана.

Заметим, что в теореме переставляющие отображения B_k необходимы. Например, отображение $(x, y) \to (y, x)$ нельзя разложить в произведение двух простых отображений ни в какой окрестности точки $(0; 0)$.

§ 3. Зависимые и независимые системы функций

3.1. Достаточное условие независимости функций. Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы непрерывно дифференцируемые функции

$$y_j = f_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Определение 1. Функция $f_m(x)$ называется *зависимой от функций* $f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)$ *на множестве* G, если существует непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(y_1, \ldots, y_{m-1})$ от $m-1$ переменных такая, что

$$f_m(x) = \Phi(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \quad \forall x \in G. \tag{2}$$

Лемма. *Если функция f_m зависима от функций $f_1, \ldots, f_{m-1}$ на множестве G, то в каждой точке $x \in G$ градиент функции f_m есть линейная комбинация градиентов $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_{m-1}$.*

Действительно, из равенства (2) получаем:

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

т.е. $\nabla f_m = \sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} \nabla f_j$.

Определение 2. Система функций (1) называется *зависимой на множестве* G, если среди них есть функция, которая зависит от остальных на множестве G. В противном случае система функций (1) называется *независимой на множестве* G.

Пример 1. Функции

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3, y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

являются зависимыми во всем пространстве, так как $y_2 = y_1^2 - 2y_3$.

Из доказанной выше леммы вытекает следующее *необходимое условие зависимости функций.*

Следствие. *Пусть $m \leqslant n$. Тогда, если система функций* (1) *зависима на множестве G, то в любой точке $x \in G$ ранг матрицы Якоби системы* (1) *меньше m.*

Доказательство. Так как система функций (1) зависима, то, согласно определению, одна из них зависима от остальных. Не ограничивая общности, можно считать, что такой функцией является f_m. Тогда выполняются равенства (3), которые означают, что m-я строка матрицы Якоби системы функций (1) в каждой точке $x \in G$ есть линейная комбинация остальных ее сторон. Следствие доказано.

Отсюда сразу следует *достаточное условие независимости функций.*

Теорема. *Пусть $m \leqslant n$. Тогда, если ранг матрицы Якоби системы* (1) *равен m хотя бы в одной точке множества G, то система функций* (1) *является независимой на множестве G.*

Действительно, в противном случае ранг матрицы Якоби был бы меньше m в любой точке $x \in G$.

Пример 2. Покажем, что функции

$$y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3, y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

являются независимыми в окрестности любой точки пространства.

Якобиан этой системы функций имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ x_2+x_3 & x_1+x_3 & x_1+x_2 \end{vmatrix}.$$

Легко показать, что он равен $2(x_1+x_2+x_3)(x_2-x_3)$. Очевидно, в любой окрестности любой точки пространства найдется точка, в которой он отличен от нуля, и поэтому в окрестности любой точки данные функции независимы.

3.2. Достаточные условия зависимости функций. Как и выше, будем предполагать, что функции

$$y_j = f_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

определены и дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$.

Через $r(x)$ обозначим ранг матрицы Якоби системы функций (1) в точке $x \in G$. Пусть $\mu = \max\limits_{x \in G} r(x)$.

Пример 1. На $\mathbb{R}^2$ рассмотрим функции f_1 и f_2 такие, что $f_1(x,y) = x^3y^2$ в полуплоскости $x \geqslant 0$, $f_2(x,y) = x^2y^3$ в полуплоскости $y \geqslant 0$, а в других точках они равны нулю.

Легко проверить, что эти функции непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^2$. Причем, если $r(x,y)$ — ранг матрицы Якоби в точке (x,y), то $r(x,y) = 2$, когда $x > 0$ и $y > 0$, $r(x,y) = 1$, когда $xy < 0$, и, наконец, $r(x,y) = 0$, когда $x < 0$ и $y < 0$.

Теорема. *Пусть функции (1) определены и непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $m \leqslant n$. Тогда, если $\mu = r(x_0)$, $x_0 \in G$, и $1 \leqslant \mu < m$, то μ функций, градиенты которых в точке x_0 линейно независимы, являются независимыми в любой окрестности точки x_0. Кроме того, существует окрестность точки x_0, в которой каждая из остальных функций зависима от этих функций.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в точке x_0 отличен от нуля определитель

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_\mu)}{\partial(x_1, \ldots, x_\mu)}.$$

Тогда из теоремы предыдущего пункта следует, что функции $f_1, \ldots, f_\mu$ являются независимыми в любой окрестности точки x_0.

Докажем, что в некоторой окрестности точки x_0 каждая из функций f_j, $j > \mu$ зависит от $f_1, \ldots, f_\mu$.

В силу теоремы о неявных функциях, система уравнений

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, \mu,$$

в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$, разрешима относительно переменных $x_1, \ldots, x_\mu$. Пусть

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n).$$

Тогда в указанной окрестности точки (x_0, y_0) для любого $j > \mu$

$$y_j = F_j(y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n),$$

где $F_j(y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n) = f_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$.

Покажем, что функции F_j от аргументов $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ не зависят.

Зафиксируем переменные $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$, кроме x_i, $i > \mu$, и рассмотрим отображение $(y_1, \ldots, y_\mu, x_i) \longrightarrow (y_1, \ldots, y_\mu, y_j)$, где $j > \mu$ и $y_j = F_j(y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Это отображение есть композиция отображений

$$(y_1, \ldots, y_\mu, x_i) \to (x_1, \ldots, x_\mu, x_i) \to (y_1, \ldots, y_\mu, y_j),$$

где

$$x_k = \varphi_k(y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, , \ldots, \mu.$$

Тогда

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_\mu, y_j)}{\partial(y_1, \ldots, y_\mu, x_i)} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_\mu, y_j)}{\partial(x_1, \ldots, x_\mu, x_i)} \cdot \frac{\partial(x_1, \ldots, x_\mu, x_i)}{\partial(y_1, \ldots, y_\mu, x_i)} \equiv 0$$

в указанной окрестности, так как

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_\mu, y_j)}{\partial(x_1, \ldots, x_\mu, x_i)} = 0$$

в любой точке множества G. Теорема доказана.

§ 4. Поверхности и многообразия

4.1. Кривые на плоскости и в пространстве. В главе 5 уже рассматривались параметрически заданные кривые на плоскости и в пространстве. Согласно данному там определению, любая непрерывная векторная функция, определенная на некотором промежутке числовой прямой, задает *непрерывную кривую*. Здесь лишь уточним это важное понятие. Для этого введем некоторые новые понятия.

Определение 1. Отображение f множества $G \subset \mathbb{R}^n$ на множество $f(G) \subset \mathbb{R}^m$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, взаимно однозначно и, кроме того, обратное отображение f^{-1} тоже непрерывно.

Определение 2. Гомеоморфизм f открытого множества G на открытое множество $f(G)$ называется *диффеоморфизмом*, если отображения f и f^{-1} непрерывно дифференцируемы. Гомеоморфизм f называется *диффеоморфизмом гладкости* k, если отображения f и f^{-1} k раз непрерывно дифференцируемы.

Определение 3. Пусть задана непрерывная векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \Delta$, которая отображает промежуток $\Delta \subset \mathbb{R}$ в n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда множество γ всевозможных пар $(t; \mathbf{r}(t))$, $t \in \Delta$, называется *непрерывной параметрически заданной кривой*.

Причем любая другая непрерывная векторная функция $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(\tau)$, $\tau \in \widetilde{\Delta}$, отображающая промежуток $\widetilde{\Delta}$ в $\mathbb{R}^n$, задает ту же кривую γ, если существует гомеоморфизм $\tau = \varphi(t)$ промежутка Δ на промежуток $\widetilde{\Delta}$ такой, что $\boldsymbol{\rho}(\varphi(t)) = \mathbf{r}(t) \quad \forall t \in \Delta$.

В этом случае будем писать

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t),\ t \in \Delta\}. \tag{1}$$

Каждая пара $(t; \mathbf{r}(t))$, $t \in \Delta$, называется *точкой кривой* γ, а точка $M \in \mathbb{R}^n$ с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$ — *носителем этой точки кривой* γ, причем пары $(t; \mathbf{r}(t))$ и $(\tau; \boldsymbol{\rho}(\tau))$, где $\tau = \varphi(t)$, — это одна и та же точка кривой γ. Переменная $t \in \Delta$ называется *параметром* или *координатой точки на* γ, а любой гомеоморфизм φ промежутка Δ на промежуток $\widetilde{\Delta}$ — *преобразованием параметра* этой кривой.

В зависимости от класса рассматриваемых кривых допускаются разные классы преобразований параметра. Например, если рассматриваются непрерывно дифференцируемые кривые, то допустимыми преобразованиями параметра являются диффеоморфизмы, а если k раз непрерывно дифференцируемые кривые, то — диффеоморфизмы гладкости k.

Совокупность всех носителей точек кривой называется ее *носителем*. Заметим, что носитель, т.е. геометрический образ, такой непрерывной кривой на плоскости или в пространстве может совсем не походить на то, что обычно понимается под линией. Поэтому, как правило, рассматриваются гладкие или кусочно-гладкие кривые. Напомним соответствующее определение.

Определение 4. Непрерывная кривая (1) называется *гладкой*, если векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in \Delta$, непрерывно дифференцируема и $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0\ \forall t \in \Delta$, а допустимыми преобразованиями параметра являются диффеоморфизмы с отличной от нуля производной. Если же кривая γ ориентирована, то допускаются только диффеоморфизмы с положительной производной.

Легко видеть, что если кривая (1) гладкая, то отображение $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ локально взаимно однозначно. Следовательно, в неко-

торой окрестности любой точки $t_0 \in \Delta$ ее можно представлять как деформированный кусок прямой, и в этом смысле она является одномерной геометрической фигурой. Отметим, что в общем случае носитель непрерывной параметрически заданной кривой на плоскости может быть как нульмерной геометрической фигурой (в случае, когда $\mathbf{r}(t)$ постоянная), так и двумерной (кривая Пеано).

Определение 5. Точка носителя кривой γ, которая является носителем по крайней мере двух точек этой кривой, называется *кратной точкой* или *точкой самопересечения кривой* γ. Кривая, не имеющая кратных точек, называется *простой кривой* (или *простой дугой*).

Таким образом, у простых кривых точка носителя кривой однозначно определяет точку кривой, и поэтому в этом случае можно не делать различия между кривой и ее носителем.

В заключение рассмотрим другой подход к описанию кривой на плоскости, основанный на том, что кривая — это множество точек $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, которое в каком-то смысле является одномерной геометрической фигурой.

Пусть в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$ задана непрерывная функция $F(x, y)$. Тогда множество всех точек $(x, y) \in G$, удовлетворяющих уравнению

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

называют *кривой, заданной неявно уравнением* (2). Однако так определенное множество точек на плоскости может совсем не походить на то, что обычно понимают под линией, поэтому на функцию $F(x, y)$ накладывают некоторые дополнительные условия. Так, например, из теоремы о существовании и дифференцируемости неявной функции следует, что если $F(x, y)$ определена и непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0), а в самой этой точке удовлетворяет условиям:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \operatorname{grad} F \neq 0,$$

то в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) множество γ точек (x, y), удовлетворяющих уравнению (2), является графиком непрерывно дифференцируемой функции: $y = f(x)$ или $x = g(y)$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть γ — множество всех точек M плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где функция $F(x, y)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$. Тогда, если*

$$\operatorname{grad} F(x, y) \neq 0 \quad \forall\, (x, y) \in \gamma,$$

то у каждой точки $M \in \gamma$ существует окрестность $O(M)$ такая, что множество $\gamma \cap O(M)$ является графиком непрерывно дифференцируемой функции (y от x или x от y).

4.2. Параметрически заданные поверхности. Сразу отметим, что параметрически заданные поверхности определяются по аналогии с параметрически заданными кривыми.

Определение 1. Пусть задана непрерывная векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, которая отображает область $D \subset \mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$. Тогда множество S всевозможных пар $(P; M)$, где P — точка области D с координатами (u, v), а M — точка пространства $\mathbb{R}^3$ с радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, называется *непрерывной параметрически заданной поверхностью.* Причем любая другая непрерывная векторная функция $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in \widetilde{D}$, отображающая область $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$, задает ту же поверхность S, если существует гомеоморфизм φ:

$$\begin{cases} \xi = \xi(u, v), \\ \eta = \eta(u, v), \end{cases}$$

области D на область $\widetilde{D}$ такой, что

$$\boldsymbol{\rho}\left(\xi(u, v),\ \eta(u, v)\right) = \mathbf{r}(u, v) \quad \forall\,(u, v) \in D.$$

В этом случае будем писать $S = \{\mathbf{r}(u, v),\ (u, v) \in D\}$. Каждая пара $(P; M)$, $P \in D$, называется *точкой поверхности* S, причем пары $((u, v); \mathbf{r}(u, v))$ и $((\xi, \eta); \boldsymbol{\rho}(\xi, \eta))$, где $\xi = \xi(u, v)$, $\eta = \eta(u, v)$, — это одна и та же точка поверхности S. Переменные u, v называются *параметрами* или *координатами точки на поверхности* S, а любой гомеоморфизм φ области D на область $\widetilde{D}$ — *преобразованием параметров (координат)* этой поверхности. Точка $M \in \mathbb{R}^3$ с радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$ называется *носителем точки* $((u, v),\ \mathbf{r}(u, v))$ поверхности S, а совокупность всех носителей ее точек — *носителем поверхности* S.

Определение 2. Точка носителя поверхности S, которая является носителем по крайней мере двух точек этой поверхности, называется *кратной точкой* или *точкой самопересечения поверхности* S. Поверхность, не имеющая кратных точек, называется *простой поверхностью.*

У простых поверхностей, как и у простых кривых, можно не делать различия между точками поверхности и их носителями. В частности, простую поверхность S можно представлять как геометрическую фигуру в пространстве, которая получается непрерывной деформацией (без разрывов и склеиваний) плоской области D, и в этом смысле она является двумерной геометрической фигурой.

Очевидно, поверхность S является простой, если она имеет *явное задание*, т.е. является графиком непрерывной функции:

$$z = f(x, y), \quad y = f(z, x) \quad \text{или} \quad x = f(y, z).$$

Во второй части определения 1 утверждается, что параметрически заданная поверхность хотя и не совпадает со своим геометрическим образом (носителем), однако она инвариантна относительно преобразования координат на ней, и в этом смысле она является геометрической фигурой в пространстве.

Заметим, что если поверхность задана непрерывно дифференцируемой векторной функцией, то при любом диффеоморфизме параметров новая векторная функция тоже будет непрерывно дифференцируемой. Это замечание делает естественным следующее определение.

Определение 3. Поверхность называется *непрерывно дифференцируемой*, если она задана непрерывно дифференцируемой векторной функцией, а допустимыми преобразованиями параметров являются диффеоморфизмы.

В координатах векторную функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, задающую поверхность S, можно записать в виде отображения

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \tag{1}$$

области $D \subset \mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$.

Определение 4. Точка поверхности S, заданной отображением (1), называется *неособой*, если в этой точке отображение (1) непрерывно дифференцируемо и ранг матрицы Якоби равен 2.

Из того, что

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \cdot \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} \cdot \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)},$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(z,x)}{\partial(\xi,\eta)} \cdot \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)},$$

следует, что свойство точки поверхности «быть неособой» инвариантно относительно преобразований параметров, которые являются диффеоморфизмами с отличным от нуля якобианом.

Определение 5. Поверхность S, заданная отображением (1), называется *гладкой*, если отображение (1) непрерывно дифференцируемо, ранг матрицы Якоби этого отображения равен 2 в любой точке области D, а допустимыми преобразованиями параметров являются диффеоморфизмы с отличным от нуля якобианом в любой точке области D.

Таким образом, *гладкая поверхность — это непрерывно дифференцируемая поверхность без особых точек.*

Покажем, что гладкая поверхность S в некоторой окрестности каждой своей точки имеет явное задание.

Пусть гладкая поверхность S задана отображением (1). Согласно определению гладкой поверхности, это отображение непрерывно дифференцируемо, и в любой точке области D отличен от нуля хотя бы один из определителей

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}.$$

Пусть в точке $(u_0, v_0) \in D$ отличен от нуля первый из этих определителей. Тогда, согласно теореме о неявных функциях, система уравнений

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v),$$

в некоторой окрестности $O(u_0, v_0)$ точки (u_0, v_0) однозначно определяет переменные u, v как функции от x, y:

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y).$$

Следовательно, часть поверхности S, определяемая сужением отображения (1) на $O(u_0, v_0)$, является графиком функции

$$z = z\left(u(x,y),\, v(x,y)\right).$$

4.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Ранее было показано, что поверхность S, являющаяся графиком функции $z = f(x,y)$, имеет наклонную касательную плоскость в точке с координатами $x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0). Причем эта касательная плоскость задается уравнением:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{1}$$

Заметим, что поверхность S, заданную уравнением $z = f(x,y)$, можно задать векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, у которой

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u,v). \tag{2}$$

Тогда уравнение касательной плоскости (1) в векторной форме имеет вид:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_u(u - u_0) + \mathbf{r}'_v(v - v_0). \tag{3}$$

Здесь векторы $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ линейно независимы, так как ранг матрицы Якоби отображения (2) равен 2.

Из сказанного выше следует, что о касательной плоскости имеет смысл говорить только в неособой точке рассматриваемой поверхности.

Определение. Пусть точка $M_0 \in \mathbb{R}^3$ является носителем неособой точки (u_0, v_0) поверхности

$$S = \{\mathbf{r}(u,v), (u,v) \in D\}. \tag{4}$$

Тогда плоскость, проходящая через точку M_0 параллельно векторам $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$, называется *касательной плоскостью к поверхности S в точке* (u_0, v_0). Прямая, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через точку M_0, называется *нормальной прямой к поверхности S* в точке (u_0, v_0), а любой ее направляющий вектор — *нормалью к поверхности S* в этой точке.

Легко видеть, что касательная плоскость не зависит от параметризации поверхности. Действительно, пусть преобразование

$$\xi = \xi(u,v), \quad \eta = \eta(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

является диффеоморфизмом, якобиан которого в точке (u_0, v_0) отличен от нуля. (Напомним, что в рассматриваемом случае только такие преобразования параметров являются допустимыми.) Тогда в этой точке

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_u = \mathbf{r}'_\xi \xi'_u + \mathbf{r}'_\eta \eta'_u, \\ \mathbf{r}'_v = \mathbf{r}'_\xi \xi'_v + \mathbf{r}'_\eta \eta'_v, \end{cases}$$

причем $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$ и векторы $\mathbf{r}'_\xi$, $\mathbf{r}'_\eta$ определяют одну и ту же плоскость, проходящую через точку M_0.

Из определения следует, что касательная плоскость к поверхности (4) в точке (u_0, v_0) задается векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_u u + \mathbf{r}'_v v, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0), \mathbf{r}'_u = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{r}'_v = \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки плоскости. Очевидно, уравнение (5) можно записать и в виде уравнения (3).

Из уравнения (5) следует, что векторы $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ лежат в одной плоскости, поэтому их смешанное произведение равно нулю и, следовательно, касательную плоскость (5) можно задать векторным уравнением

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) = 0$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

где x, y, z — координаты переменной точки на касательной плоскости, x_0, y_0, z_0 — координаты точки M_0, а x'_u, y'_u, z'_u и x'_v, y'_v, z'_v — координаты векторов $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ в точке (u_0, v_0). Далее, так как в неособой точке поверхности (4) вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]$ ненулевой и ортогонален касательной плоскости (5), то вектор $\mathbf{N}$ является одной из нормалей к поверхности S в точке (u_0, v_0), а нормальная прямая задается векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + [\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]t, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

или тремя уравнениями для координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}t, \\ y = y_0 + \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}t, \\ z = z_0 + \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

В частности, если поверхность S есть график функции $z = f(x, y)$, то нормальная прямая к поверхности S в точке (x_0, y_0) задается уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t, \\ y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t, \\ z = f(x_0, y_0) + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4.4. Поверхности, заданные неявно. Выше рассматривались параметрически заданные поверхности. Каждая такая поверхность задается непрерывным или непрерывно дифференцируемым отображением из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$ и фактически отождествляется с классом отображений, каждое из которых получается из данного с помощью допустимого преобразования параметров. При таком определении поверхности приходится различать точку поверхности и ее образ в пространстве. Здесь рассмотрим другой подход к описанию поверхности, основанной на том, что поверхность — это множество точек $S \subset \mathbb{R}^3$, которое в некотором смысле является двумерной геометрической фигурой.

Определение. Множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *непрерывной поверхностью без точек самопересечения* или *непрерывным двумерным многообразием*, если у любой точки $M_0 \in S$ существует окрестность $O(M_0)$ такая, что множество $S \cap O(M_0)$ есть непрерывная параметрически заданная поверхность без точек самопересечения.

Если, кроме того, для любой точки $M_0 \in S$ поверхность $S \cap \cap O(M_0)$ является гладкой, то множество S называется *гладким двумерным многообразием* или *гладкой поверхностью.*

Пусть в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$ задана непрерывная функция $F(x, y, z)$. Тогда множество всех точек $(x, y, z) \in G$, удовлетворяющих уравнению

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

называют *поверхностью, заданной неявно* уравнением (1).

Так определенное множество может совсем не походить на обычное представление о поверхности. Например, оно может быть пустым, может состоять из конечного числа точек, наконец, оно может быть замыканием некоторого открытого множества. Поэтому на функцию $F(x, y, z)$ накладывают дополнительные условия.

Так, например, из теоремы о существовании и дифференцируемости неявной функции следуют такие почти очевидные утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, y, z)$ определена и непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0). Тогда, если $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\quad \operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) множество S точек (x, y, z), удовлетворяющих уравнению* (1), *является гладкой поверхностью, имеющей явное задание.*

Теорема 2. *Пусть функция $F(x, y, z)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$, а S — множество всех точек $(x, y, z) \in G$, удовлетворяющих уравнению* (1). *Тогда, если*

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) \neq 0 \quad \forall\, (x, y, z) \in S, \tag{2}$$

то множество S является гладким двумерным многообразием (гладкой поверхностью).

Пусть S — гладкая поверхность, заданная уравнением (1), где функция $F(x, y, z)$ удовлетворяет условию (2). Тогда в окрестности каждой своей точки поверхность S имеет гладкое параметрическое задание:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Подставив эти функции в уравнение (1), получим тождество

$$F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0,$$

из которого следует, что вектор $\operatorname{grad} F$ является нормалью к поверхности S в рассматриваемой точке. Действительно, так как

$$F'_x x'_u + F'_y y'_u + F'_z z'_u = 0, \quad F'_x x'_v + F'_y y'_v + F'_z z'_v = 0,$$

то вектор (F'_x, F'_y, F'_z) ортогонален векторам (x'_u, y'_u, z'_u), (x'_v, y'_v, z'_v), которые определяют касательную плоскость к поверхности S в рас-

сматриваемой точке. Следовательно, касательная плоскость к этой поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0) задается уравнением:

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0,$$

где производные F'_x, F'_y, F'_z вычислены в точке $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

4.5. Параметрически заданные k-мерные поверхности в n-мерном пространстве. В этом пункте обобщим понятия параметрически заданной кривой и параметрически заданной поверхности на случай произвольных k-мерных поверхностей в n-мерном пространстве.

Определение 1. Пусть задано непрерывное отображение $x = \varphi(t)$, которое отображает область $D \subset \mathbb{R}^k$ в пространство $\mathbb{R}^n$, $k < n$. Тогда множество S всевозможных пар $(t; \varphi(t))$, $t \in D$, называется *непрерывной параметрически заданной k-мерной поверхностью.* Причем любое другое непрерывное отображение $x = \psi(\tau)$, $\tau \in \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^n$, задает ту же поверхность S, если существует гомеоморфизм $\tau = \tau(t)$ области D на область $\widetilde{D}$ такой, что

$$\psi(\tau(t)) = \varphi(t) \quad \forall\, t \in D.$$

В этом случае каждая пара $(t; \varphi(t))$, $t \in D$, называется *точкой поверхности* S, а точка $x = \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ — *носителем* этой точки поверхности S. Совокупность всех носителей точек поверхности S называется *носителем поверхности* S.

Отображение $x = \varphi(t)$ в координатах имеет вид:

$$x_j = \varphi_j(t), \quad t = (t_1, \ldots, t_k) \in D, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Если k-мерная поверхность S задана отображением (1), то переменные $t_1, \ldots, t_k$ называются *параметрами* или *координатами точки на поверхности* S, а любой гомеоморфизм области D — *преобразованием параметров* (*координат*) этой поверхности.

Как и выше, определяются *кратные точки поверхности.* Поверхность, не имеющая кратных точек, называется *простой k-мерной поверхностью.* Простую k-мерную поверхность S можно представлять себе как множество точек в $\mathbb{R}^n$, которое получается из k-мерной области D непрерывной деформацией, и в этом смысле она является k-мерной.

Определение 2. Поверхность называется *непрерывно дифференцируемой,* если она задана непрерывно дифференцируемым отображением, а допустимыми преобразованиями параметров являются диффеоморфизмы.

Определение 3. Точка поверхности S, заданной отображением (1), называется *неособой,* если в этой точке отображение (1) непрерывно дифференцируемо и ранг матрицы Якоби равен k.

Как и для поверхностей в трехмерном пространстве, легко показать, что свойство точки поверхности «быть неособой» инвариантно относительно преобразований параметров, которые являются диффеоморфизмами с отличным от нуля якобианом.

Определение 4. Поверхность S, заданная отображением (1), называется *гладкой k-мерной поверхностью*, если отображение (1) непрерывно дифференцируемо, ранг матрицы Якоби этого отображения равен k в любой точке области D, а допустимыми преобразованиями параметров являются диффеоморфизмы с отличным от нуля якобианом.

Легко видеть, что гладкая $(n-1)$-мерная поверхность S в окрестности каждой своей точки имеет явное задание, т.е. является графиком некоторой функции от $(n-1)$-го переменного. Действительно, пусть в рассматриваемой точке, например,

$$\frac{\partial(x_1,\dots,x_{n-1})}{\partial(t_1,\dots,t_{n-1})}\neq 0.$$

Тогда система уравнений

$$x_j=\varphi_j(t_1,\dots,t_{n-1}),\quad j=1,\dots,n-1,$$

в некоторой окрестности рассматриваемой точки однозначно решается относительно переменных $t_1,\dots,t_{n-1}$:

$$t_j=\psi_j(x_1,\dots,x_{n-1}),\quad j=1,\dots,n-1,$$

и поэтому в этой окрестности переменная x_n есть функция от $x_1,\dots,x_{n-1}$, а рассматриваемая часть поверхности S является графиком этой функции.

Определение 5. Пусть точка $M_0\in\mathbb{R}^n$ является носителем неособой точки $t_0=(t_1^0,\dots,t_k^0)$ поверхности S, заданной отображением (1). Тогда k-мерная плоскость, заданная отображением

$$x=\varphi(t_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t_0)t_i,\quad (t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{R}^k,$$

называется *касательной плоскостью* или *касательным пространством к поверхности S в точке M_0*.

Любая прямая, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через точку M_0, называется *нормальной прямой к поверхности S* в точке t_0, а любой направляющий вектор такой прямой — *нормалью к поверхности S* в этой точке.

Легко видеть, что касательная плоскость не зависит от параметризации поверхности. (Случай $n=3$, $k=2$ рассмотрен в пункте 3.)

Из определения нормали к поверхности S, заданной отображением (1), следует, что нормалью к S является любой ненулевой вектор $\mathbf{N}$, удовлетворяющий системе из n линейных уравнений

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}, \mathbf{N}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как ранг матрицы этой системы равен k, то в любой точке гладкой k-мерной поверхности существует $n-k$ линейно независимых нормалей.

4.6. Гладкие k-мерные многообразия. Множество S точек n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ называется непрерывным *k-мерным многообразием*, если у любой точки $M_0 \in S$ существует окрестность $O(M_0)$ такая, что множество $S \cap O(M_0)$ является непрерывной параметрически заданной k-мерной поверхностью без точек самопересечения. Если, кроме того, для любой точки $M_0 \in S$ поверхность $S \cap O(M_0)$ является гладкой, то множество S называется *гладким k-мерным многообразием.*

Из теоремы о существовании и непрерывной дифференцируемости функций, неявно заданных системой уравнений, как следствие получается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ задана система непрерывно дифференцируемых функций*

$$F_j(x), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где $m < n$. Через S обозначим множество всех точек $x \in G$, удовлетворяющих системе уравнений

$$F_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Тогда, если множество S непустое и ранг матрицы Якоби системы функций (1) равен m в любой точке $x \in S$, то множество S является гладким $(n-m)$-мерным многообразием.

Согласно этому утверждению, если S — гладкое $(n-m)$-мерное многообразие, заданное системой уравнений (2), то в некоторой окрестности каждой своей точки x_0 оно имеет гладкое параметрическое задание

$$x = \varphi(t_1, \ldots, t_{n-m}), \tag{3}$$

которое непрерывно дифференцируемо и такое, что векторы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-m, \tag{4}$$

линейно независимы. Подставив значения (3) в уравнения (2) и продифференцировав по t_i, получим равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial\varphi_k}{\partial t_i} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

которые в векторной форме имеют вид

$$\left(\nabla F_j, \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n - m$. Таким образом, векторы

$$\nabla F_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

вычисленные в точке $x_0 \in S$, ортогональны касательному пространству к многообразию S в точке x_0, и поэтому если вектор $x - x_0$ лежит в этом касательном пространстве, то он удовлетворяет условиям:

$$(\nabla F_j, x - x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Верно и обратное утверждение, т.е. если вектор $x - x_0$ удовлетворяет условиям (6), то он лежит в касательном пространстве к многообразию S в точке x_0. Действительно, так как векторы (4) и (5) образуют базис в n-мерном пространстве, то существуют числа α_i, $i = 1, 2, \ldots, n - m$, и β_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, такие, что

$$x - x_0 = \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \nabla F_i.$$

Умножим это векторное равенство скалярно на каждый из векторов ∇F_j. В результате получим, что β_i должны удовлетворять системе линейных однородных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i (\nabla F_i, \nabla F_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

определитель которой отличен от нуля (так как векторы (5) линейно независимы). Следовательно, $\beta_i = 0$ для любого $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, а это и означает, что вектор $x - x_0$ лежит в касательном пространстве.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение:

Если S — гладкое $(n-m)$-мерное многообразие, заданное системой уравнений $F_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, то касательное пространство к многообразию S в точке x_0 задается системой линейных уравнений

$$(\nabla F_j, x - x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где векторы ∇F_j вычислены в точке x_0.

Отсюда, в частности, следует, что любой вектор $\mathbf{N}$, который является линейной комбинацией векторов $\nabla F_1, \ldots, \nabla F_m$, *ортогонален многообразию S в точке x_0*, т.е. ортогонален касательному пространству к многообразию S в точке x_0. Очевидно, верно и обратное утверждение: *если вектор $\mathbf{N}$ ортогонален многообразию S в точке x_0, то он является линейной комбинацией векторов $\nabla F_1, \ldots, \nabla F_m$.*

§ 5. Экстремумы функций многих переменных

5.1. Определения и необходимое условие экстремума. Пусть функция f определена на множестве $D_f \subset \mathbb{R}^n$ и отображает D_f в $\mathbb{R}$.

Определение 1. Точка $M_0 \in D_f$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) *функции* f, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall M \in O_\delta(M_0) \cap D_f \quad f(M) \leqslant f(M_0) \quad (f(M) \geqslant f(m_0)).$$

В этом случае будем говорить, что функция f в точке M_0 имеет *локальный максимум* (*минимум*).

Определение 2. Точка $M_0 \in D_f$ называется *точкой экстремума* или *экстремальной точкой функции* f, если M_0 — точка локального максимума или минимума функции f.

В этом случае будем говорить, что функция f в точке M_0 имеет *экстремум*.

Рассматриваемые экстремумы (минимумы и максимумы) называются *локальными*, так как при их определении учитывается поведение функции лишь в некоторой окрестности точки M_0. В дальнейшем для краткости слово «локальный» иногда будем опускать.

Определение 3. Точка $M_0 \in D_f$ называется *точкой строгого максимума* (*минимума*) *функции* f, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall M \in \overset{\bullet}{O}_\delta (M_0) \cap D_f \quad f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0)).$$

Точка $M_0 \in D_f$ называется *точкой строгого экстремума функции* f, если M_0 — точка строгого максимума или минимума функции f.

Теорема. *Пусть точки M и M_0 имеют координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ и, соответственно, $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и пусть функция f дифференцируема в точке M_0. Тогда, если M_0 — точка экстремума функции f, то в этой точке*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ одного переменного x_1. Она в точке x_1^0 дифференцируема и имеет экстремум. Следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0$. Аналогично доказывается, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = 0 \quad \forall i$. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно сформулировать еще и так:

Если функция f в точке M_0 дифференцируема и имеет экстремум, то $\operatorname{grad} f(M_0) = 0$.

Определение 4. Точка $M_0 \in D_f$ называется *стационарной точкой функции* f (или *скалярного поля* f), если в этой точке функция f дифференцируема и $\operatorname{grad} f = 0$.

Таким образом, если функция f в точке M_0 дифференцируема и имеет экстремум, то M_0 — стационарная точка функции f.

Пример 1. Найдем экстремумы функции

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy.$$

Эта функция определена и дифференцируема на всей плоскости. Следовательно, она может иметь экстремумы только в стационарных точках. Эти точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 2y - 6x = 0, \end{cases}$$

которая имеет два решения $x_1 = y_1 = 0$ и $x_2 = 6$, $y_2 = 18$. Вычислим значения f в этих точках:

$$f(0;0) = 0, \quad f(6;18) = -108.$$

В точке $(0;0)$ функция f не имеет экстремума, так как $f(x,0) = x^3$, и поэтому в любой окрестности точки $(0,0)$ она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

В точке $(6;18)$ функция f имеет локальный минимум, так как $f(6+\xi,\ 18+\eta) = -108 + \xi^2(9+\xi) + (3\xi - \eta)^2$, и поэтому, если $|\xi| < 9$, то $f(6+\xi,\ 18+\eta) \geqslant f(6;18)$.

Таким образом, данная функция имеет единственную точку экстремума с координатами $x = 6$, $y = 18$, в которой она имеет локальный минимум.

Пример 2. Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6xy$ на замкнутом круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Легко видеть, что данная функция имеет единственную стационарную точку с координатами $x = 0$, $y = 0$. Однако эта точка не является экстремальной, так как

$$f(x,0) = x^2 > 0, \quad f(x,x) = -4x^2 < 0$$

для любого $x \neq 0$. Следовательно, точки максимума и минимума функции f, определенной на круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$, лежат на окружности $x^2+y^2 = R^2$. Она задается уравнениями $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$. Тогда из равенства

$$f(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi) = R^2(1 - 6\sin\varphi\cos\varphi) = R^2(1 - 3\sin 2\varphi)$$

следует, что на круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$

$$\min f = -2R^2, \quad \max f = 4R^2.$$

В общем случае можно рассматривать такую задачу.

Пусть функция f дифференцируема на открытом ограниченном множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывна на его замыкании $\overline{G}$, и пусть требуется найти наименьшее и наибольшее значения этой функции на множестве $\overline{G}$. Для этого, как и в примере 2, можно поступить следующим образом: найти все стационарные точки функции f на множестве G, вычислить значения f в этих точках и выбрать из них наименьшее и наибольшее. Затем найти наибольшее и наименьшее значения функции f на границе ∂G множества G. Сравнив значения f на G и на ∂G, найдем наименьшее и наибольшее значения f на $\overline{G}$.

Следует отметить, что в общем случае наибольшую трудность представляет задача нахождения наименьшего и наибольшего значения функции f на ∂G. Некоторые методы решения таких задач будут рассмотрены в конце этого параграфа.

5.2. Необходимые и достаточные условия максимума и минимума. Пусть функция f от n переменных $x_1, x_2 \ldots, x_n$ в некоторой окрестности точки $M_0 \in D_f$ имеет производные второго порядка, и эти производные непрерывны в точке M_0. Тогда, как известно, ее первый дифференциал в точке M_0 — это линейная форма

$$\Phi_1(M_0; \mathbf{h}) = (\nabla f, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i,$$

а второй дифференциал — это квадратичная форма

$$\Phi_2(M_0; \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} h_i h_j,$$

где производные от f вычислены в точке M_0, а $\mathbf{h}$ — это вектор с координатами $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Теорема 1. *Пусть функция f определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки M_0. Тогда, если M_0 — точка максимума (минимума) функции f, то $\nabla f(M_0) = 0$ и*

$$\Phi_2(M_0; \mathbf{h}) \leqslant 0 \quad (\geqslant 0) \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Доказательство. Утверждение о том, что $\nabla f(M_0) = 0$, доказано в предыдущем пункте. Докажем неравенство (1).

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано функция $f(M)$ в точке M_0 разлагается следующим образом:

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{2}\Phi_2(M_0; \overrightarrow{M_0M}) + \alpha(M)\rho^2,$$

где $\rho = |\, \overrightarrow{M_0M}\, |$, а функция $\alpha(M)$ такая, что $\alpha(M) \to 0$ при $M \to \to M_0$.

Для любой точки $M \neq M_0$ через $\boldsymbol{\xi}$ обозначим единичный вектор $\frac{1}{\rho}\overrightarrow{M_0M}$. Тогда $\overrightarrow{M_0M}=\rho\boldsymbol{\xi}$, $\Phi_2(M_0;\overrightarrow{M_0M}) = \rho^2\Phi_2(M_0;\boldsymbol{\xi})$,

$$f(M) - f(M_0) = \rho^2\left(\frac{1}{2}\Phi_2(M_0;\boldsymbol{\xi}) + \alpha(M)\right). \tag{2}$$

Поэтому при любом фиксированном $\boldsymbol{\xi}$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(M) - f(M_0)}{\rho^2} = \frac{1}{2}\Phi_2(M_0;\boldsymbol{\xi}). \tag{3}$$

Заметим, что этот предел — это предел при $M \to M_0$ по направлению вектора $\boldsymbol{\xi}$.

Из равенства (3) следует, что если M_0 — точка максимума (минимума) функции f, то $\Phi_2(M_0;\boldsymbol{\xi}) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) для любого единичного вектора $\boldsymbol{\xi}$. Для единичных векторов неравенство (1) доказано. Для любого $\mathbf{h}$ оно следует из того, что $\Phi_2(M_0;\mathbf{h}) = |\mathbf{h}|^2\Phi_2(M_0;\boldsymbol{\xi})$, где $\boldsymbol{\xi}$ — единичный вектор, коллинеарный вектору $\mathbf{h}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция f определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки M_0. Тогда, если $\nabla f(M_0) = 0$ и*

$$\Phi_2(M_0;\mathbf{h}) < 0 \quad (> 0) \quad \forall\,\mathbf{h} \neq \mathbf{0}, \tag{4}$$

то M_0 — точка строгого максимума (минимума) функции f.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было получено равенство (2):

$$f(M) - f(M_0) = \rho^2\left(\frac{1}{2}\Phi_2(M_0;\boldsymbol{\xi}) + \alpha(M)\right), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — единичный вектор, а функция $\alpha(M)$ такая, что $\alpha(M) \to 0$ при $M \to M_0$.

Пусть $m = \inf\limits_{|\boldsymbol{\xi}|=1}|\Phi_2(M_0;\boldsymbol{\xi})|$. Так как функция $|\Phi(M_0;\boldsymbol{\xi})|$ на единичной сфере непрерывна и, в силу условия (4), положительна, то $m > 0$. А так как $\lim\limits_{M\to M_0}\alpha(M) = 0$, то

$$\exists\,\delta > 0 : \forall\, M \in \overset{\bullet}{O}_\delta(M_0) \quad |\alpha(M)| < \frac{m}{4}. \tag{6}$$

Из равенства (5) и условия (6) следует, что для любой точки $M \in \overset{\bullet}{O}_\delta(M_0)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f(M) - f(M_0)}{\rho^2} - \frac{1}{2}\Phi_2(M_0;\boldsymbol{\xi})\right| < \frac{m}{4},$$

из которого и следует наше утверждение. Действительно, если $\Phi_2(M_0; \boldsymbol{\xi}) < 0$, то

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{\rho^2} < \frac{1}{2}\Phi_2(M_0; \boldsymbol{\xi}) + \frac{m}{4} \leqslant -\frac{m}{2} + \frac{m}{4} = -\frac{m}{4} < 0$$

а если $\Phi_2(M_0; \boldsymbol{\xi}) > 0$, то

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{\rho^2} > \frac{1}{2}\Phi_2(M_0; \boldsymbol{\xi}) - \frac{m}{4} \geqslant \frac{m}{2} - \frac{m}{4} = \frac{m}{4} > 0$$

для любой точки $M \in \overset{\bullet}{O}_\delta\,(M_0)$. Теорема 2 доказана.

Напомним некоторые понятия из линейной алгебры.

Определение. Квадратичная форма $\Phi(\mathbf{h})$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если $\Phi(\mathbf{h}) > 0$ (< 0) для любого $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется *неопределенной*.

Теперь теорему 2 можно сформулировать следующим образом: *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0. Тогда, если M_0 — стационарная точка функции f, и второй дифференциал функции f в точке M_0 является положительно* (*отрицательно*) *определенной квадратичной формой, то M_0 — точка строгого минимума* (*максимума*) *функции f.*

Из теоремы 1 следует, что *если второй дифференциал функции f в точке M_0 является неопределенной квадратичной формой, то в точке M_0 у функции f нет ни максимума, ни минимума.*

Действительно, если квадратичная форма $\Phi_2(M_0; \mathbf{h})$ принимает значения разных знаков, то из равенства

$$\Phi_2(M_0; \mathbf{h}) = |\mathbf{h}|^2 \Phi_2(M_0; \boldsymbol{\xi}),$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — единичный вектор, следует, что $\Phi_2(M_0; \boldsymbol{\xi})$ принимает значения разных знаков, что невозможно, если M_0 — точка максимума или минимума функции f.

В линейной алгебре доказывается, что квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны. Это утверждение называется *критерием Сильвестра*.

Пример. Найдем экстремумы функции

$$z = x^3 + y^2 - 6xy.$$

Легко видеть, что

$$dz = (3x^2 - 6y)\,dx + (2y - 6x)\,dy,$$

$$d^2z = 6x\,dx^2 - 12\,dx\,dy + 2\,dy^2.$$

В примере 1 из п.5.1. установлено, что эта функция имеет две стационарные точки $M_1(0;0)$ и $M_2(6;18)$.

Для исследования стационарных точек M_1 и M_2 рассмотрим второй дифференциал данной функции.

В точке $M_1(0;0)$ имеем:

$$d^2z = -12\xi\eta + 2\eta^2 = 2\eta(\eta - 6\xi),$$

где переменные dx и dy переобозначены на ξ и η. Очевидно, эта квадратичная форма является неопределенной. Следовательно, в точке M_1 у данной функции нет ни максимума, ни минимума.

В точке $M_2(6;18)$ имеем:

$$d^2z = 36\xi^2 - 12\xi\eta + 2\eta^2 = (6\xi - \eta)^2 + \eta^2.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной, поэтому M_2 — точка строгого минимума данной функции.

5.3. Случай функций двух переменных. Для функций двух переменных сформулируем и докажем теорему, в которой условия теоремы 2 из п.5.2. выражены в явном виде через вторые производные.

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Тогда, если M_0 — стационарная точка функции f, и в этой точке*

$$f''_{xx}f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0, \tag{1}$$

то M_0 — точка строгого экстремума функции f. Причем, если $f''_{xx} < 0$, то M_0 — точка строгого максимума, а если $f''_{xx} > 0$, то M_0 — точка строгого минимума.

Если же в точке M_0

$$f''_{xx}f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 < 0, \tag{2}$$

то она не является экстремальной для f.

Доказательство. Пусть в стационарной точке M_0 выполнено условие (1). Тогда в ней $f''_{xx} \neq 0$ и

$$\Phi_2(\xi,\eta) = f''_{xx}\xi^2 + 2f''_{xy}\xi\eta + f''_{yy}\eta^2 =$$
$$= \frac{1}{f''_{xx}}\left((f''_{xx}\xi + f''_{xy}\eta)^2 + (f''_{xx}f''_{yy} - {f''_{xy}}^2)\eta^2\right). \tag{3}$$

Следовательно, в этом случае знак квадратичной формы $\Phi_2(\xi,\eta)$ совпадает со знаком производной $f''_{xx}(x_0,y_0)$, и поэтому если $f''_{xx} < 0$, то M_0 — точка строгого максимума, а если $f''_{xx} > 0$, то M_0 — точка строгого минимума функции f.

Пусть теперь в точке M_0 выполнено условие (2). Тогда, если $f''_{xx} \neq 0$, то из равенства (3) следует, что квадратичная форма $\Phi_2(\xi,\eta)$ является неопределенной. Аналогично рассматривается и случай, когда $f''_{yy} \neq 0$. Если же $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$, то $f''_{xy} \neq 0$ и $\Phi_2(\xi,\eta) = 2f''_{xy}\xi\eta$. Следовательно, если в точке M_0 выполнено условие (2), то во всех случаях квадратичная форма $\Phi_2(\xi,\eta)$ является неопределенной, и поэтому точка M_0 не является экстремальной. Теорема доказана.

Для примера рассмотрим функцию $z = x^3 + y^2 - 6xy$, которая уже изучалась в п.5.1. и п.5.2.

Она имеет две стационарные точки $M_1(0;0)$ и $M_2(6;18)$. У нее

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = -6,$$

$$\Delta = z''_{xx}z''_{yy} - {z''_{xy}}^2 = 12x - 36.$$

В точке M_1 $\Delta = -36 < 0$, поэтому в ней нет экстремума. В точке M_2 $z''_{xx} = 36 > 0$ и $\Delta = 36 > 0$, поэтому M_2 — точка строгого минимума.

5.4. Условные экстремумы. Пусть на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ задано m функций

$$\varphi_1(x), \ \ldots, \ \varphi_m(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $m < n$. Через S обозначим множество всех точек $x \in G$, в которых каждая из функций (1) обращается в нуль. Уравнения

$$\varphi_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

будем называть *уравнениями* или *условиями связи*.

Пусть, кроме того, на множестве G задана функция $f(x)$.

Определение. Точка $x_0 \in S$ называется *точкой условного* или *относительного экстремума* (*максимума* или *минимума*) *функции* $f(x)$ при условиях (2), если x_0 есть точка локального экстремума (соответственно, максимума или минимума) сужения функции f на множество S.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x,y) = x^2+y^2$ и уравнение связи $x + y = a$, где a — некоторое число.

Здесь G — это вся плоскость $\mathbb{R}^2$, а S — это прямая $y = a - x$. Сужение функции f на эту прямую — это функция

$$z = f(x, a - x) = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Ее экстремумы находятся по уже известным правилам:

$$z'_x = 4x - 2a = 0, \quad x_0 = \frac{a}{2}.$$

В точке x_0 функция z имеет строгий минимум. На S точке x_0 соответствует точка (x_0, y_0), где $y_0 = a - x_0 = \frac{a}{2}$. Согласно определению, точка (x_0, y_0) есть точка условного минимума функции f при условии $x + y = a$.

Заметим, что точка (x_0, y_0) является точкой локального минимума функции f только при $a = 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что множество G открытое, функции f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы на G и градиенты $\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_m$ в рассматриваемой точке x_0 линейно независимы, т.е. ранг матрицы Якоби системы функций (1) в точке x_0 равен m. Отсюда, в частности, следует, что система функций (1) в окрестности точки x_0 является независимой. В этом случае говорят, что условия (2) в точке x_0 являются *независимыми*.

Не ограничивая общности, можно считать, что у матрицы Якоби системы функций (1) в точке x_0 отличен от нуля минор из первых m столбцов:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0. \tag{3}$$

Согласно теореме о неявных функциях, систему уравнений (2) в некоторой окрестности точки x_0 можно решить относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$. Пусть

$$x_i = \psi_i(x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Тогда сужение функции f на множество S в окрестности точки x_0 имеет вид

$$f(\psi_1, \ldots, \psi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = g(x_{m+1}, \ldots, x_n), \tag{5}$$

причем функция $g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x^0_{m+1}, \ldots, x^0_n)$.

Следовательно, *точка x_0 является точкой условного экстремума функции $f(x)$ при условиях (2) тогда и только тогда, когда точка $(x^0_{m+1}, \ldots, x^0_n)$ является точкой локального экстремума функции (5).*

Согласно этому утверждению, нахождение условного экстремума сводится к нахождению обычного локального экстремума, если имеется возможность решить систему уравнений (2) относительно каких-то m переменных. Однако не всегда это удается, и поэтому в следующем пункте рассмотрим другой способ нахождения точек условного экстремума.

5.5. Необходимый признак условного экстремума. Метод множителей Лагранжа. В этом пункте выведем необходимые условия для точек экстремума функции

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

от n переменных при условии, что эти переменные удовлетворяют системе из m, $m < n$, уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

и функции

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \tag{3}$$

являются независимыми.

Теорема. *Пусть функции* (1) *и* (3) *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* x_0, *и в этой точке ранг матрицы Якоби системы функций* (3) *равен* m. *Тогда, если* x_0 *— точка экстремума функции* (1) *при условиях* (2), *то существуют числа* $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ *такие, что в точке* x_0 *выполняется равенство*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0 \nabla \varphi_j. \tag{4}$$

Доказательство. При сделанных предположениях система уравнений (2) в некоторой окрестности точки x_0 задает гладкое $(n - m)$ — мерное многообразие S. Пусть отображение $x = x(t)$, $t = (t_1, \dots, t_{n-m})$ является параметрическим заданием этого многообразия, и пусть $x_0 = x(t_0)$. Тогда векторы

$$\frac{\partial x}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial t_{n-m}} \tag{5}$$

линейно независимы и образуют базис в касательном пространстве к многообразию S в точке x_0, а векторы

$$\nabla \varphi_1, \dots, \nabla \varphi_m \tag{6}$$

ортогональны этому касательному пространству, причем они линейно независимы, так как ранг матрицы Якоби системы функций (3) равен m. Следовательно, совокупность векторов (5) и (6) является базисом в пространстве $\mathbb{R}^n$.

С другой стороны, согласно определению, точка x_0 является точкой экстремума функции (1) при условиях (2), если точка t_0 является точкой локального экстремума функции $g(t) = f(x(t))$. Следовательно, в этой точке

$$\frac{\partial g}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} = 0$$

для любого $j = 1, \ldots, n-m$, а это означает, что вектор ∇f в точке x_0 ортогонален векторам (5) и поэтому является линейной комбинацией векторов (6), т.е. существуют числа $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ такие, что в точке x_0 выполняется равенство (4). Теорема доказана.

Таким образом, если некоторая точка является точкой экстремума функции (1) при условиях (2), то ее координаты должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, & (7) \\ \varphi_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. & (8) \end{cases}$$

Отметим, что эта система состоит из $n+m$ уравнений относительно $n+m$ переменных.

При исследовании условных экстремумов обычно вводят вспомогательную функцию

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x) \tag{9}$$

от $n+m$ переменных $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Ее называют *функцией Лагранжа*, числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *множителями Лагранжа*, а метод их использования — *методом Лагранжа*.

Легко видеть, что условия (7) и (8) совпадают с необходимыми условиями локального экстремума функции (9). Действительно, ее производные по x_i дают условия (7), а производные по λ_j — условия (8).

Таким образом, *если точка $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ является точкой экстремума функции* (1) *при условиях* (2), *то найдутся числа $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ такие, что точка (x_0, λ_0), где $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$, будет стационарной точкой функции Лагранжа* (9).

П р и м е р. Рассмотрим задачу об отыскании наибольшего и наименьшего значений симметрической квадратичной формы

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{10}$$

на единичной сфере, заданной уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \tag{11}$$

5 Зак. 193

Для этой задачи функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right).$$

Следовательно, координаты точек экстремума функции (10) при условии (11) должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2\lambda x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

После дифференцирования функции $f(x)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

из которой следует, что λ — собственное значение линейного оператора с матрицей $A = \|a_{ij}\|$, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — собственный вектор, соответствующий этому собственному значению.

Умножим i-е уравнение системы (12) на x_i и просуммируем по i от 1 до n. С учетом условия (11) в результате получим:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \lambda.$$

Таким образом, наибольшее значение симметричной квадратичной формы (10) на единичной сфере равно наибольшему собственному значению линейного оператора с матрицей $\|a_{ij}\|$, а наименьшее значение равно наименьшему собственному значению. Отметим, что существование этих экстремальных значений следует из того, что непрерывная функция на единичной сфере принимает как наибольшее, так и наименьшее значения.

5.6. Необходимые и достаточные признаки условных максимумов и минимумов. Для формулировки признаков минимума и максимума функции $f(x)$ при условиях:

$$\varphi_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

удобно использовать второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j.$$

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x)$ *и функции*

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x), \quad m < n, \tag{2}$$

дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x_0, *и в этой точке ранг матрицы Якоби системы функций* (2) *равен* m. *Тогда, если* x_0 *— точка экстремума функции* $f(x)$ *при условиях* (1), *то существуют числа* $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ *такие, что точка* (x_0, λ_0) *будет стационарной точкой функции Лагранжа. Причем, если* x_0 *— точка минимума (максимума), то в точке* (x_0, λ_0) $d^2L \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *для любых* $dx_1, \ldots, dx_n$, *удовлетворяющих условиям:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

где производные вычислены в точке x_0.

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказано в предыдущем пункте. Для доказательства второго утверждения заметим, что при сделанных предположениях уравнения (1) в некоторой окрестности точки x_0 задают гладкое $(n-m)$-мерное многообразие S. Тогда, если $x = x(t)$ — параметрическое задание этого многообразия, то, согласно определению, точка $x_0 = x(t_0)$ является точкой минимума (максимума) функции $f(x)$ при условиях (1), если точка t_0 является точкой локального минимума (максимума) функции $g(t) = f(x(t))$.

Очевидно, $g(t) = L(x(t), \lambda_0)$, $dg = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} dx_i$,

$$d^2 g = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} d^2 x_i.$$

Точка (x_0, λ_0) является стационарной точкой функции Лагранжа, т.е. в этой точке $\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому в точке t_0 справедливо равенство

$$d^2 g = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j. \tag{4}$$

Пусть функция $g(t)$ в точке t_0 имеет минимум (максимум). Тогда, как известно,

$$d^2 g = \sum_{i,j=1}^{n-m} \frac{\partial^2 g}{\partial t_i \partial t_j} dt_i\, dt_j \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

для любых $dt_1, \ldots, dt_{n-m}$. Отсюда и из равенства (4) следует, что в точке (x_0, λ_0) $d^2L \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) для любых $dx_1, \ldots, dx_n$ таких, что

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial x_i}{\partial t_k} dt_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

т.е. для любого вектора dx, лежащего в касательном пространстве к многообразию S в точке x_0.

Для завершения доказательства осталось заметить, что вектор dx лежит в касательном пространстве к многообразию S в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке он ортогонален векторам $\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_m$, т.е. удовлетворяет условиям (3). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ и функции (2) дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x_0, и в этой точке ранг матрицы Якоби системы функций (2) равен m. Тогда, если точка (x_0, λ_0) является стационарной для функции Лагранжа и в этой точке квадратичная форма d^2L принимает положительные (отрицательные) значения на любом ненулевом векторе $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, удовлетворяющем условиям (3), то x_0 — точка строгого минимума (максимума) функции $f(x)$ при условиях (1).*

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было установлено, что x_0 является точкой минимума (максимума) функции $f(x)$ при условиях (1) тогда и только тогда, когда точка t_0 является точкой локального минимума (максимума) функции $g(t) = f(x(t))$, причем, если точка (x_0, λ_0) — это стационарная точка функции Лагранжа, то в точке t_0 справедливо равенство $d^2g = d^2L$. Из него следует, что если квадратичная форма d^2L принимает положительные (отрицательные) значения на любом ненулевом векторе dx, удовлетворяющем условиям (3), то квадратичная форма d^2g будет положительно (отрицательно) определенной. Как известно, в этом случае точка t_0 является точкой строгого минимума (максимума) функции $g(t)$. Теорема 2 доказана.

Пример. Исследуем на экстремум функцию $f(x, y) = 1 - 4x - 8y$ при условии $x^2 - 8y^2 = 8$.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(x^2 - 8y^2 - 8).$$

Найдем ее стационарные точки, т.е. решим систему уравнений

$$\begin{cases} -4 - 2\lambda x = 0, \\ -8 + 16\lambda y = 0, \\ x^2 - 8y^2 = 8. \end{cases}$$

Из нее получаем: $\lambda x = -2$, $\lambda y = \dfrac{1}{2}$, $8\lambda^2 = 2$. Следовательно, система имеет два решения:

$$\lambda_1 = 0,5, \qquad x_1 = -4, \qquad y_1 = 1;$$
$$\lambda_2 = -0,5, \qquad x_2 = 4, \qquad y_2 = -1.$$

Чтобы воспользоваться теоремой 2, рассмотрим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2L = -2\lambda(dx)^2 + 16\lambda(dy)^2,$$

при условии, что dx и dy удовлетворяют равенству

$$2x\,dx - 16y\,dy = 0.$$

В точке (x_1, y_1): $dx = -2dy$, $\lambda = 0,5$,

$$d^2L = -(dx)^2 + 8(dy)^2 = 4(dy)^2.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной. Следовательно, точка $(-4; 1)$ — точка условного минимума функции f.

В точке (x_2, y_2): $dx = -2dy$, $\lambda = -0,5$,

$$d^2L = (dx)^2 - 8(dy)^2 = -4(dy)^2.$$

Эта квадратичная форма отрицательно определенная. Следовательно, точка $(4; -1)$ — точка условного максимума функции f.

Глава 11

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Определение и критерии существования кратного интеграла Римана

1.1. Разбиения измеримого множества. Пусть G — непустое измеримое по Жордану множество точек пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Любое конечное множество $\{G_1, \ldots, G_N\}$ непустых измеримых подмножеств множества G, которые попарно не пересекаются и объединение которых равно G, называется *разбиением множества* G и обозначается $\tau(G)$.

Если из контекста ясно, о разбиениях какого множества говорится, то вместо $\tau(G)$ будем писать просто τ. А чтобы различать разбиения, будем использовать верхние и нижние индексы. Например, будем говорить о последовательности разбиений

$$\tau_k = \tau_k(G), \quad k \in \mathbb{N},$$

множества G.

Пример 1. Пусть G_1 — измеримое подмножество множества G, а $G_2 = G \backslash G_1$. Тогда если $G_1 \neq \oslash$ и $G_2 \neq \oslash$, то множества G_1 и G_2 образуют разбиение множества G.

Согласно определению, разбиение множества G может состоять только из одного множества $G_1 = G$.

Пример 2. Рассмотрим один практически важный способ получения разбиений заданного измеримого множества G. Для простоты рассмотрим двумерный случай.

Так как множество G ограничено, то существует клетка $\Delta = (a; b] \times \times (c; d]$ такая, что $G \subset \Delta$. Промежуток $(a; b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

разобьем на n непересекающихся промежутков $(x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Аналогично, промежуток $(c; d]$ точками

$$y_j = c + \frac{d-c}{m} j, \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

разобьем на m непересекающихся промежутков $(y_{j-1}; y_j]$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда множество всех клеток вида

$$\Delta_{ij} = (x_{i-1}; x_i] \times (y_{j-1}; y_j]$$

является разбиением клетки Δ, а множество всех непустых пересечений $G \cap \Delta_{ij}$ является разбиением множества G.

Определение 2. Пусть τ и τ' — некоторые разбиения множества G. Разбиение τ' называется *продолжением разбиения* τ, если любое множество разбиения τ' содержится в некотором множестве разбиения τ или, что то же самое, каждое множество из τ есть объединение некоторых множеств из τ'.

Пусть задано некоторое разбиение множества G:

$$\tau = \{G_1, \ldots, G_N\}.$$

Выберем какое-то множество $G_j \in \tau$ и разобьем его на два непустых измеримых множества G'_j и G''_j. В результате получим новое разбиение множества G: $\{G_1, \ldots, G'_j, G''_j, \ldots, G_N\}$. Очевидно, оно является продолжением данного разбиения τ. Про него будем говорить, что оно получается из τ однократным делением.

Легко видеть, что разбиение τ' является продолжением разбиения τ тогда и только тогда, когда τ' получается из τ при помощи конечного числа однократных делений. Отсюда следует, что если τ' — продолжение разбиения τ, а τ'' — продолжение разбиения τ', то τ'' — продолжение разбиения τ, т.е. имеет место свойство транзитивности.

Отметим еще одно важное свойство разбиений.

Лемма. *Для любых двух разбиений заданного множества G существует третье разбиение, которое является продолжением каждого из них.*

Действительно, если $\tau' = \{G'_1, \ldots, G'_{N'}\}$, $\tau'' = \{G''_1, \ldots, G''_{N''}\}$ — разбиения множества G, то множество всевозможных непустых пересечений $G'_i \cap G''_j$ является разбиением множества G, являющимся продолжением как для τ', так и для τ''.

1.2. Интегральные суммы и интеграл Римана. Пусть на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 1. Для любого разбиения $\tau = \{G_1, \ldots, G_N\}$ множества G сумма

$$\sum_{j=1}^{N} f(\xi^j) mG_j,$$

где ξ^j — произвольно выбранная точка множества G_j, называется *интегральной суммой Римана функции* f и обозначается $\sigma(f; \tau)$ или $\sigma(f; \tau; \boldsymbol{\xi})$, где $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^N)$.

Пусть

$$s(f;\tau) = \inf_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;\tau;\boldsymbol{\xi}), \quad S(f;\tau) = \sup_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;\tau;\boldsymbol{\xi}).$$

Очевидно, если функция f ограничена, то

$$s(f;\tau) = \sum_{j=1}^{N} m_j mG_j, \tag{1}$$

$$S(f;\tau) = \sum_{j=1}^{N} M_j mG_j, \tag{2}$$

где

$$m_j = \inf_{x \in G_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x \in G_j} f(x). \tag{3}$$

Чтобы это утверждение было справедливо в общем случае, будем считать, что

$$\pm\infty \cdot mG_j = \pm\infty, \quad \text{если } mG_j > 0;$$
$$\pm\infty \cdot mG_j = 0, \quad \text{если } mG_j = 0.$$

Определение 2. Для любого разбиения τ множества G суммы $s(f;\tau)$ и $S(f;\tau)$, определенные по формулам (1) и (2), называются *интегральными суммами Дарбу функции* f (соотв., *нижней* и *верхней*).

Лемма. *Интегральные суммы любой функции f, определенной на измеримом множестве G, обладают следующими свойствами:*

1°. *для любого разбиения τ множества G*

$$s(f;\tau) \leqslant \sigma(f;\tau;\boldsymbol{\xi}) \leqslant S(f;\tau);$$

2°. *если разбиение τ' является продолжением разбиения τ, то*

$$s(f;\tau') \geqslant s(f;\tau), \quad S(f;\tau') \leqslant S(f;\tau);$$

3°. *для любых двух разбиений τ' и τ'' множества G*

$$s(f;\tau') \leqslant S(f;\tau'').$$

Доказательство. Первое свойство следует из того, что для любого измеримого множества $G_j \subset G$ справедливы неравенства:

$$m_j mG_j \leqslant f(\xi^j) mG_j \leqslant M_j mG_j \quad \forall \xi^j \in G_j,$$

где m_j и M_j определены по формулам (3).

Для доказательства второго свойства достаточно рассмотреть лишь случай, когда τ' получается из τ однократным делением.

Пусть τ' получается из τ делением множества $G_j \in \tau$ на два измеримых непустых подмножества G_j^1 и G_j^2, и пусть

$$m_j^k = \inf_{x \in G_j^k} f(x), \quad k = 1, 2.$$

Тогда $m_j^k \geqslant m_j$, и поэтому

$$m_j mG_j = m_j mG_j^1 + m_j mG_j^2 \leqslant m_j^1 mG_j^1 + m_j^2 mG_j^2.$$

Отсюда следует, что $s(f;\tau) \leqslant s(f;\tau')$, так как эти суммы отличаются лишь рассмотренными слагаемыми. Аналогично, если $M_j^k = \sup\limits_{x \in G_j^k} f(x), \quad k = 1, 2$, то

$$M_j^k \leqslant M_j, \quad M_j mG_j \geqslant M_j^1 mG_j^1 + M_j^2 mG_j^2,$$

и поэтому $S(f;\tau) \geqslant S(f;\tau')$.

Третье свойство следует из леммы, доказанной в пункте 1.1, и из уже доказанных свойств интегральных сумм. Действительно, пусть разбиение τ является продолжением как для τ', так и для τ''. Тогда

$$s(f;\tau') \leqslant s(f;\tau) \leqslant S(f;\tau) \leqslant S(f;\tau'').$$

Лемма доказана.

Определение 3. Точные грани $\sup\limits_{\tau} s(f;\tau)$ и $\inf\limits_{\tau} S(f;\tau)$, где sup и inf берутся по всем разбиениям τ множества G, называются *интегралами Дарбу от функции f по множеству G* (соотв., *нижним* и *верхним*) и обозначаются $\underline{J}(f)$ и $\overline{J}(f)$.

Из свойства 3 интегральных сумм следует, что для любой функции f, определенной на измеримом по Жордану множестве G, справедливо неравенство $\underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f)$.

Определение 4. Если интегралы Дарбу от функции f по множеству G конечны и равны между собой, то функция f называется *интегрируемой по Риману на множестве G*, а общее значение интегралов Дарбу называется *интегралом Римана от функции f по множеству G* и обозначается

$$\int f\,dG \quad \text{или} \quad \int\limits_G f(x)\,dx.$$

Из этого определения следует, что если функция f интегрируема на множестве G, то

$$s(f;\tau) \leqslant \int f\,dG \leqslant S(f;\tau) \quad \forall \tau(G).$$

Пример 1. Любая кусочно-постоянная функция, определенная на измеримом множестве, интегрируема на этом множестве.

Действительно, пусть функция f, определенная на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, является кусочно-постоянной, т.е. существует разбиение $\tau = \{G_1, \ldots, G_N\}$ множества G такое, что

$$f(x) = c_j \quad \forall x \in G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

где c_j — некоторые константы. Тогда

$$s(f;\tau) = S(f;\tau) = \sum_{j=1}^{N} c_j mG_j.$$

Следовательно, функция f интегрируема и

$$\int f\, dG = \sum_{j=1}^{N} c_j mG_j.$$

Пример 2. Пусть G — измеримое множество, $\gamma \subset G$ и $m\gamma = 0$. Тогда, если $f(x) = 0$ на $G \setminus \gamma$, а на γ функция f принимает произвольные значения, то она на G интегрируема и $\int f\, dG = 0$.

Действительно, если $\tau = \{\gamma, G \setminus \gamma\}$, то $s(f;\tau) = S(f;\tau) = 0$. Следовательно, функция f интегрируема на G и $\int f\, dG = 0$.

Заметим, что здесь функция f на γ может быть и неограниченной.

Пример 3. Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $\Delta = [0; 1]$. Напомним, что она определяется следующим образом: $f(x) = 0$, если x иррациональное, и $f(x) = 1$, если x рациональное.

Пусть $\tau = \{g_1, \ldots, g_n\}$ — некоторое разбиение отрезка Δ. Легко доказать, что $mg_j > 0$ тогда и только тогда, когда множество g_j имеет хотя бы одну внутреннюю точку, а тогда g_j имеет как рациональные, так и иррациональные точки. Отсюда следует, что $s(f;\tau) = 0$, $S(f;\tau) = 1$ для любого разбиения отрезка Δ, и поэтому функция Дирихле на отрезке Δ является неинтегрируемой по Риману.

1.3. Критерий интегрируемости. Для функций многих переменных, как и в одномерном случае, доказывается следующий критерий интегрируемости по Риману.

Теорема. *Для того чтобы функция f, определенная на измеримом по Жордану множестве G, была интегрируема по Риману на G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau_\varepsilon(G): \quad S(f;\tau_\varepsilon) - s(f;\tau_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть функция f интегрируема на множестве G, т.е. интегралы Дарбу от f по G конечны и равны:

$$\underline{J}(f) = \overline{J}(f). \tag{2}$$

Из определений точных граней следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют разбиения τ'_ε и τ''_ε множества G такие, что

$$S(f;\tau'_\varepsilon) < \overline{J}(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(f;\tau'') > \underline{J}(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если выполнено условие (2), то

$$S(f;\tau'_\varepsilon) - s(f;\tau''_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Через τ_ε обозначим некоторое разбиение множества G, которое является продолжением как для τ'_ε, так и для τ''_ε. Тогда

$$S(f;\tau_\varepsilon) - s(f;\tau_\varepsilon) \leqslant S(f;\tau'_\varepsilon) - s(f;\tau''_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Необходимость условия (1) для интегрируемости функции f на множестве G доказана. Докажем достаточность.

Из условия (1) и неравенств

$$s(f;\tau_\varepsilon) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f) \leqslant S(f;\tau_\varepsilon)$$

следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leqslant \overline{J}(f) - \underline{J}(f) \leqslant \varepsilon,$$

а это означает, что выполняется равенство (2), т.е. функция f интегрируема на G. Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы функция f, определенная на измеримом по Жордану множестве G, была интегрируема по Риману на G, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность разбиений $\{\tau_k\}$ множества G такая, что*

$$\lim_{k\to\infty}\Big(S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k)\Big) = 0. \tag{3}$$

В этом случае

$$\lim_{k\to\infty} s(f;\tau_k) = \lim_{k\to\infty} S(f;\tau_k) = \int f\,dG. \tag{4}$$

Доказательство. Из условия (3) очевидным образом следует условие (1). Если же выполнено условие (1), то, полагая $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, получим условие (3). Докажем теперь, что из условия (3) следуют равенства (4).

Так как

$$s(f;\tau_k) \leqslant \int f\,dG \leqslant S(f;\tau_k) \quad \forall k,$$

то

$$\int f\,dG - s(f;\tau_k) \leqslant S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k),$$

$$S(f;\tau_k) - \int f\,dG \leqslant S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k).$$

Поэтому если выполнено условие (3), то справедливы и равенства (4). Следствие доказано.

При исследовании функций во многих случаях удобно пользоваться понятием *колебания функции на множестве.*

Определение. Пусть задана функция f и множество $g \subset D_f$. Тогда разность

$$\sup_{x\in g} f(x) - \inf_{x\in g} f(x)$$

называется *колебанием функции* f *на множестве* g и обозначается $\omega(f;g)$.

Используя введенное понятие, условие (1) можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau = \{G_1, \ldots, G_N\}: \quad \sum_{j=1}^{N} \omega(f;G_j)mG_j < \varepsilon.$$

Аналогично, условие (3) принимает вид: существует последовательность разбиений $\tau_k = \{G_1^k, \ldots, G_{N_k}^k\}$, $k \in \mathbb{N}$, множества G такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \omega(f;G_j^k)mG_j^k = 0.$$

1.4. Ограниченность интегрируемой функции. Примеры показывают, что некоторые неограниченные функции могут быть интегрируемы в смысле данного выше определения. Покажем, что любая интегрируемая по Риману функция будет ограниченной, если пренебречь ее значениями на некотором множестве меры нуль.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на множестве G, то существует множество $\gamma \subset G$ меры нуль такое, что функция f на множестве $G\setminus\gamma$ ограничена.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. не существует множества меры нуль, вне которого функция f ограничена. Тогда любое разбиение τ множества G содержит множество G_j такое, что $mG_j > 0$ и $\omega(f; G_j) = +\infty$. Отсюда следует, что функция f не будет интегрируемой на G. Следовательно, наше предположение неверное. Теорема 1 доказана.

Заметим, что в теореме 1 множество γ, в частности, может быть пустым. Следовательно, если функция интегрируема на множестве G, то она либо ограничена на G, либо ограничена на множестве $G \setminus \gamma$, где $\gamma \subset G$ и $m\gamma = 0$.

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на множестве G, то она интегрируема на любом множестве $G^* = G \setminus \gamma$, где $\gamma \subset G$ и $m\gamma = 0$, причем*

$$\int f\, dG = \int f\, dG^*. \tag{1}$$

Доказательство. Любое разбиение τ множества G порождает соответствующие разбиения τ^* и τ' множеств G^* и γ, причем

$$s(f;\tau) \leqslant s(f;\tau^*) + s(f;\tau') = s(f;\tau^*), \tag{2}$$

$$S(f;\tau) \geqslant S(f;\tau^*) + S(f;\tau') = S(f;\tau^*). \tag{3}$$

Через f^* обозначим сужение функции f на множество G^*. Тогда из неравенств (2) и (3) следует, что

$$s(f;\tau) \leqslant \underline{J}(f^*) \leqslant \overline{J}(f^*) \leqslant S(f;\tau) \quad \forall \tau.$$

Поэтому если f интегрируема на G, то f^* интегрируема на G^* и справедливо равенство (1). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$, $x \in G$, интегрируема на множестве $G^* = G \setminus \gamma$, где $\gamma \subset G$ и $m\gamma = 0$, то она интегрируема на G и справедливо равенство* (1).

Доказательство. Пусть τ^* — произвольное разбиение множества G^*. Через τ обозначим разбиение множества G, которое получается присоединением к τ^* множества γ. Тогда

$$s(f;\tau^*) = s(f;\tau) \leqslant \underline{J}(f), \quad S(f;\tau^*) = S(f;\tau) \geqslant \overline{J}(f).$$

Отсюда следует, что

$$s(f;\tau^*) \leqslant \underline{J}(f) \leqslant \overline{J}(f) \leqslant S(f;\tau^*) \quad \forall \tau^*.$$

Поэтому если f интегрируема на G^*, то она интегрируема на G и справедливо равенство (1). Теорема 3 доказана.

Таким образом, с одной стороны, любая интегрируемая функция становится ограниченной, если изменить ее на множестве

меры нуль. С другой стороны, значения функции на множестве меры нуль не влияют ни на ее интегрируемость, ни на значение интеграла. Следовательно, при интегрировании значениями функции на множестве меры нуль можно пренебречь. Поэтому, не теряя общности, в дальнейшем при изучении интегралов Римана будем рассматривать только ограниченные функции.

1.5. Интегрируемость по Риману и последовательности разбиений, мелкость которых стремится к нулю. Прежде всего дадим определение мелкости разбиения множества $G \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Для любого множества $g \subset \mathbb{R}^n$ точная верхняя грань расстояний $\rho(x, y)$, когда $x \in g$ и $y \in g$, называется *диаметром множества* g и обозначается $\operatorname{diam} g$.

Таким образом, по определению, $\operatorname{diam} g = \sup\limits_{x,y \in g} \rho(x, y)$.

Определение 2. Для любого разбиения $\tau = \{G_1, \ldots, G_N\}$ максимальный из диаметров множеств $G_1, \ldots, G_N$ называется *мелкостью* (или *диаметром*) *разбиения* τ и обозначается $|\tau|$.

Таким образом,

$$|\tau| = \max_j \operatorname{diam} G_j, \quad G_j \in \tau.$$

В этом пункте будет доказано следующее замечательное утверждение.

Если ограниченная функция интегрируема, то для любой последовательности разбиений, мелкость которых стремится к нулю, соответствующие последовательности интегральных сумм (Римана, нижних, верхних) сходятся к интегралу от этой функции.

Сначала докажем одну лемму.

Лемма. *Если мера множества $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ равна нулю, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое измеримое множество g такое, что $\gamma \subset g$ и $mg < \varepsilon$.*

Доказательство. Так как $m\gamma = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует клеточное множество S такое, что $\gamma \subset S$ и $mS < \varepsilon/3^n$. Заметим, что множество S не является открытым.

Пусть S — это объединение попарно не пересекающихся клеток

$$\Delta_j = (a_1^j; b_1^j] \times \cdots \times (a_n^j; b_n^j], \quad j = 1, \ldots, N.$$

Положим

$$\delta = \min_{i,j}(b_i^j - a_i^j).$$

Через g обозначим объединение открытых клеток

$$\Delta_j^\delta = (a_1^j - \delta; b_1^j + \delta) \times \cdots \times (a_n^j - \delta; b_n^j + \delta).$$

Это множество открытое и измеримое. Кроме того, $\gamma \subset g$ и

$$mg \leqslant \sum_{j=1}^{N} m\Delta_j^\delta \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{N} m\Delta_j = 3^n mS < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Если ограниченная функция f интегрируема на множестве G, то для любой последовательности разбиений τ_k множества G таких, что $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$, справедливы равенства*

$$\lim_{k\to\infty} s(f;\tau_k) = \lim_{k\to\infty} S(f;\tau_k) = \int f\,dG. \tag{1}$$

Доказательство. Из критерия интегрируемости следует, что это утверждение будет доказано, если мы докажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\Big(S(f;\tau_k) - s(f;\tau_k)\Big) = 0. \tag{2}$$

Следовательно, нужно доказать, что если f интегрируема на G,

$$\tau_k = \{G_1^k, \ldots, G_{N_k}^k\} \text{ и } \lim_{k\to\infty} |\tau_k| = 0, \tag{3}$$

то сумма

$$\sum\nolimits_k = \sum_{i=1}^{N_k} \omega(f;G_i^k) mG_i^k \tag{4}$$

стремится к нулю при $k \to \infty$.

Выберем некоторое $\varepsilon > 0$. Так как функция f интегрируема на G, то существует разбиение $\tau = \{G_1, \ldots, G_N\}$ множества G такое, что

$$\sum_{j=1}^{N} \omega(f;G_j) mG_j < \varepsilon.$$

Через γ обозначим объединение границ всех множеств $G_j \in \tau$. Из доказанной выше леммы следует, что существует открытое измеримое множество g такое, что $\gamma \subset g$ и $mg < \varepsilon$.

Ограниченные замкнутые множества γ и ∂g не пересекаются, поэтому расстояние между ними больше нуля. Пусть $\delta = \rho(\gamma;\, \partial g)$, а $O_\delta(\gamma)$ — δ-окрестность множества γ. Тогда $O_\delta(\gamma) \subset g$.

Из условия (3) следует:

$$\exists\, K_\delta : \ \forall\, k \geqslant K_\delta \quad |\tau_k| < \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому, если множество G_i^k, у которого $k \geqslant K_\delta$, пересекается с $O_{\delta/2}(\gamma)$, то $G_i^k < O_\delta(\gamma)$, а если оно не пересекается, то лежит в некотором G_j. Следовательно, для любого $k \geqslant K_\delta$ сумма (4) естественным образом распадается на две суммы: сумму по всем $G_i^k \subset O_\delta(\gamma)$ и сумму остальных слагаемых (в них каждое G_i^k лежит в некотором G_j). Первую сумму обозначим $\sum_k'$, а вторую — $\sum_k''$. Тогда

$$\sum_k = \sum_k' + \sum_k''. \qquad (5)$$

Через $||f||$ обозначим $\sup|f(x)|$ на множестве G. Тогда, очевидно,

$$\sum_k' \leqslant 2||f||mg < 2||f||\varepsilon \quad \forall\, k \geqslant K_\delta. \qquad (6)$$

Для оценки второй суммы заметим, что ее можно представить следующим образом:

$$\sum_k'' = \sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{G_i^k \subset G_j} \omega(f; G_i^k) m G_i^k \Big),$$

где внутренняя сумма берется по всем $G_i^k \subset G_j$, причем, если таких G_i^k нет, то она полагается равной нулю. А так как $\omega(f; G_i^k) \leqslant \omega(f; G_j)$ для $G_i^k \subset G_j$, то

$$\sum_{G_i^k \subset G_j} \omega(f; G_i^k) m G_i^k \leqslant \omega(f; G_j) \sum_{G_i^k \subset G_j} m G_i^k \leqslant \omega(f; G_j) m G_j,$$

и поэтому

$$\sum_k'' \leqslant \sum_{j=1}^{N} \omega(f; G_j) m G_j < \varepsilon \quad \forall\, k. \qquad (7)$$

Таким образом доказано (см. (5), (6), (7)), что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon: \quad \forall k \geqslant K_\varepsilon \quad \sum_k < \varepsilon(2||f|| + 1),$$

т.е. выполняется условие (2). Теорема доказана.

Эту теорему и критерий интегрируемости из п.1.3 можно объединить в следующее утверждение.

Для того чтобы функция f, определенная на измеримом по Жордану множестве G, была интегрируема по Риману на G, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности разбиений $\{\tau_k\}$ множества G выполнялось условие

$$\lim_{k\to\infty}\Bigl(S(f;\tau_k)-s(f;\tau_k)\Bigr)=0. \qquad (8)$$

Тогда, если функция f ограничена на множестве G, условие (8) выполняется для любой последовательности, у которой

$$\lim_{k\to\infty}|\tau_k|=0. \qquad (9)$$

Причем для любой такой последовательности

$$\lim_{k\to\infty}s(f;\tau_k)=\int f\,dG, \qquad (10)$$

$$\lim_{k\to\infty}S(f;\tau_k)=\int f\,dG, \qquad (11)$$

$$\lim_{k\to\infty}\sigma(f;\tau_k;\boldsymbol{\xi})=\int f\,dG. \qquad (12)$$

Последнее равенство справедливо при любом выборе точек ξ^j в интегральных суммах Римана.

Так как равенства (8), (10), (11), (12) выполняются для любой последовательности разбиений, удовлетворяющей условию (9), то пишут

$$\lim_{|\tau|\to0}\Bigl(S(f;\tau)-s(f;\tau)\Bigr)=0,$$
$$\lim_{|\tau|\to0}s(f;\tau)=\int f\,dG,$$
$$\lim_{|\tau|\to0}S(f;\tau)=\int f\,dG,$$
$$\lim_{|\tau|\to0}\sigma(f;\tau;\boldsymbol{\xi})=\int f\,dG.$$

Заметим, что определение интеграла по промежутку, данное в главе 7, формально отличается от определения этого параграфа: там разбиения состояли только из промежутков, а здесь — из произвольных измеримых подмножеств рассматриваемого промежутка. Однако, как следует из последнего утверждения, для ограниченных функций эти два определения интеграла по промежутку равносильны.

§ 2. Свойства интегрируемых функций и кратных интегралов

2.1. Свойства интегрируемых функций. В предыдущем параграфе было показано, что при исследовании интегрируемости по Риману функции f большую роль играет разность сумм Дарбу $S(f;\tau)$ и $s(f;\tau)$. Для краткости введем обозначение:

$$\Omega(f;\tau) = S(f;\tau) - s(f;\tau).$$

Таким образом, если $\tau = \{G_1, \ldots, G_N\}$, то

$$\Omega(f;\tau) = \sum_{j=1}^{N} \omega(f;G_j)mG_j.$$

Там же было показано, что в теории интеграла Римана особую роль играют последовательности разбиений, мелкость которых стремится к нулю. Такие последовательности разбиений будем называть *римановыми.*

Как уже отмечалось, будем рассматривать только ограниченные функции. При этом предположении докажем свойства интегрируемых функций многих переменных, аналогичные тем, которые были установлены в главе 7 для функций одного переменного.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на множестве G, то она интегрируема на любом измеримом множестве $G' \subset G$.*

Доказательство. Пусть $\{\tau_k'\}$ — некоторая риманова последовательность разбиений множества G', а $\{\tau_k''\}$ — риманова последовательность разбиений множества $G'' = G \backslash G'$. Тогда, очевидно,

$$\Omega(f;\tau_k') \leqslant \Omega(f;\tau_k') + \Omega(f;\tau_k'') = \Omega(f;\tau_k), \tag{1}$$

где $\tau_k = \tau_k' \cup \tau_k''$ — разбиение множества G.

Из интегрируемости функции f на G следует, что $\Omega(f;\tau_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из неравенства (1) получаем:

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(f;\tau_k') = 0.$$

Таким образом, функция f на множестве G' удовлетворяет условию критерия интегрируемости (см. п.1.3), и поэтому f интегрируема на G'. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если функция f интегрируема на множествах G' и G'', то она интегрируема и на множестве $G = G' \cup G''$.*

Доказательство. Пусть сначала множества G' и G'' не пересекаются. Через $\{\tau_k'\}$ и $\{\tau_k''\}$ обозначим римановы последовательности разбиений множеств G' и G''. Тогда $\tau_k = \tau_k' \cup \tau_k''$ является разбиением множества G, причем

$$\Omega(f;\tau_k) = \Omega(f;\tau_k') + \Omega(f;\tau_k'').$$

Так как функция f интегрируема на G' и G'', то правая часть этого равенства стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(f;\tau_k) = 0,$$

что и доказывает интегрируемость функции f на множестве G.

Пусть теперь G' и G'' пересекаются. Тогда $G = G' \cup (G''\backslash G')$, причем множества G' и $G''\backslash G'$ не пересекаются. По теореме 1 функция f интегрируема на $G''\backslash G'$, а по доказанному выше она будет интегрируемой на $G' \cup (G''\backslash G')$. Теорема 2 доказана.

Как и при доказательстве теоремы в п.1.5, для любой функции $f(x)$, $x \in G$, через $\|f\|$ обозначим $\sup|f(x)|$ на множестве G, т.е. положим

$$\|f\| = \sup_{x\in G} |f(x)|.$$

Эта величина называется *нормой функции* f. Отметим, что для любой ограниченной функции она является некоторым числом.

Лемма. *Если функции f и g определены и ограничены на множестве G, то для любого непустого множества $G' \subset G$ справедливы неравенства:*

$$\omega(|f|;G') \leqslant \omega(f;G'), \tag{2}$$

$$\omega(f \pm g;G') \leqslant \omega(f;G') + \omega(g;G'), \tag{3}$$

$$\omega(fg;G') \leqslant \|g\|\omega(f;G') + \|f\|\omega(g;G'), \tag{4}$$

где, например, $\omega(f;G')$ — колебание функции f на множестве G'.

Если, кроме того, функция $1/g$ определена и ограничена на G, то

$$\omega\left(\frac{1}{g};G'\right) \leqslant \left\|\frac{1}{g}\right\|^2 \omega(g;G'). \tag{5}$$

Действительно, для любых x и y из G' справедливы неравенства:

$$||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \omega(f; G),$$

$$|(f(x) \pm g(x)) - (f(y) \pm g(y))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leqslant \omega(f; G') + \omega(g; G'),$$

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |g(x)| \cdot |f(x) - f(y)| +$$
$$+ |f(y)| \cdot |g(x) - g(y)| \leqslant \|g\|\omega(f; G') + \|f\|\omega(g; G'),$$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leqslant \left\|\frac{1}{g}\right\|^2 \omega(g; G').$$

Из них, как легко видеть, и следуют неравенства (2)–(5).

Теорема 3. *Если функции f и g интегрируемы на множестве G, то и функции $|f|$, $|g|$, $f \pm g$, fg интегрируемы на G. Если, кроме того, функция $1/g$ определена и ограничена на G, то она тоже интегрируема на G.*

Доказательство. Пусть $\{\tau_k\}$ — некоторая риманова последовательность разбиений множества G. Тогда, в силу доказанной выше леммы, $\Omega(|f|; \tau_k) \leqslant \Omega(f; \tau_k)$. А так как функция f интегрируема на G, то правая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \Omega(|f|; \tau_k) = 0,$$

что и доказывает интегрируемость функции $|f|$.

Аналогично доказываются и другие утверждения теоремы. Например,

$$\Omega\left(\frac{1}{g}; \tau_k\right) \leqslant \left\|\frac{1}{g}\right\|^2 \Omega(g; \tau_k) \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно, функция $1/g$ интегрируема на множестве G. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть $G_k \subset G$ и $\lim\limits_{k \to \infty} mG_k = mG$. Тогда, если функция f ограничена на множестве G и интегрируема на любом множестве G_k, то она интегрируема на множестве G.*

Доказательство. Пусть τ'_k — разбиение множества G_k, для которого $\Omega(f; \tau'_k) < \dfrac{1}{k}$. Для любого натурального k такое разбиение τ'_k множества G_k существует, так как функция f интегрируема на G_k.

Через τ_k обозначим разбиение множества G, состоящее из множества $G \backslash G_k$ и всех множеств из τ'_k. Тогда

$$\Omega(f;\tau_k) = \Omega(f;\tau'_k) + \omega(f;G\backslash G_k)m(G\backslash G_k) < \frac{1}{k} + 2\|f\|m(G\backslash G_k) \to 0$$

при $k \to \infty$, и поэтому функция f интегрируема на G. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Если последовательность интегрируемых функций $f_k(x)$, $x \in G$, сходится при $k \to \infty$ равномерно на множестве G, то предельная функция $f(x)$ интегрируема на G.*

Доказательство. Для любого разбиения $\tau = \{G_1, \ldots, G_N\}$ множества G и любых точек $\xi^i, \eta^i \in G_i$ имеем:

$$\sigma(f;\tau;\boldsymbol{\xi}) - \sigma(f;\tau;\boldsymbol{\eta}) = \sigma(f - f_k;\tau;\boldsymbol{\xi}) + \\ + \sigma(f_k;\tau;\boldsymbol{\xi}) - \sigma(f_k;\tau;\boldsymbol{\eta}) + \sigma(f_k - f;\tau;\boldsymbol{\eta}) \leqslant \\ \leqslant 2\|f - f_k\|mG + \Omega(f_k;\tau).$$

Поэтому

$$\Omega(f;\tau) \leqslant 2\|f - f_k\|mG + \Omega(f_k;\tau) \quad \forall \tau.$$

Так как f_k интегрируема на G, то существует разбиение τ_k множества G такое, что $\Omega(f_k;\tau_k) < \dfrac{1}{k}$. Для последовательности $\{\tau_k\}$ таких разбиений имеем:

$$\Omega(f;\tau_k) \leqslant 2\|f - f_k\|mG + \frac{1}{k} \to 0$$

при $k \to \infty$, так как, в силу равномерной сходимости f_k к f на G,

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\| = 0.$$

Следовательно, функция f на множестве G удовлетворяет условию интегрируемости. Теорема 5 доказана.

2.2. Теоремы об интегрируемости непрерывных функций. Для функций многих переменных имеется такая же связь между интегрируемостью и непрерывностью, как и для функций одного переменного.

Теорема 1. *Если функция f определена и непрерывна на измеримом замкнутом множестве G, то она интегрируема на G.*

Доказательство. Пусть $\omega_f(\delta)$ — модуль непрерывности функции f, т.е.

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\rho(x,y)\leqslant\delta} |f(x) - f(y)|,$$

где sup берется по всевозможным парам точек из G, расстояние между которыми не превосходит δ. Так как функция f непрерывна на ограниченном замкнутом множестве G, то она равномерно непрерывна на G, и поэтому

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0. \tag{1}$$

Очевидно, если τ — некоторое разбиение множества G, то

$$\omega(f;G_j)\leqslant\omega_f(|\tau|)\quad\forall\,G_j\in\tau.$$

Умножив это неравенство на mG_j и просуммировав по всем $G_j\in\tau$, получим неравенство

$$\Omega(f;\tau)\leqslant\omega_f(|\tau|)mG,$$

из которого, в силу условия (1), следует, что f интегрируема на G. Теорема 1 доказана.

Отметим, что приведенное доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы об интегрируемости функции, непрерывной на отрезке (см. § 2 главы 7).

Теорема 2. *Пусть функция f определена на измеримом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$. Тогда если f ограничена на G и непрерывна всюду, кроме, может быть, точек множества меры нуль, то f интегрируема на G.*

Доказательство. Пусть γ — объединение множества точек разрыва функции f и граничных точек множества G. Через g_k обозначим открытые измеримые множества, удовлетворяющие условиям: $\gamma\subset g_k$ и $mg_k\to0$ при $k\to\infty$.

Пусть теперь $G_k=G\backslash g_k$. Очевидно, множества G_k измеримы и замкнуты. По условию функция f непрерывна на G_k, и поэтому, согласно теореме 1, она интегрируема на любом G_k. А так как f ограничена на G и $m(G/G_k)\to0$ при $k\to\infty$, то по теореме 4 из пункта 2.1 функция f интегрируема на G. Теорема 2 доказана.

Пример. Функция $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi}{x}\cdot\sin\dfrac{\pi}{y}$ на открытом квадрате $\Delta=(0;1)\times(0;1)$ непрерывна и ограничена. В силу теоремы 2, она интегрируема на Δ.

Аналогично, функция $f(x,y)=\operatorname{sgn}\,\sin\dfrac{\pi}{x}\cdot\operatorname{sgn}\,\sin\dfrac{\pi}{y}$ тоже интегрируема на Δ, так как она ограничена на Δ и непрерывна всюду, кроме точек множества на прямых $x=1/k$ и $y=1/k$, где $k\in\mathbb{N}$, а это множество имеет меру нуль.

2.3. Свойства кратных интегралов. Как и ранее, будем рассматривать только ограниченные функции, определенные на измеримых по Жордану множествах. Более того, будем предполагать, что все рассматриваемые функции интегрируемы по Риману.

Сформулируем сначала четыре основных свойства кратных интегралов.

1. *Если множество* $G \subset \mathbb{R}^n$ *измеримо, то*

$$\int dG = mG. \tag{1}$$

2. *Если функции* f *и* g *интегрируемы на множестве* G, *то для любых действительных чисел* α *и* β *справедливо равенство*

$$\int (\alpha f + \beta g)\, dG = \alpha \int f\, dG + \beta \int g\, dG. \tag{2}$$

Это свойство называется *свойством линейности интеграла.*

3. *Если функции* f *и* g *интегрируемы на множестве* G *и*

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \forall\, x \in G, \tag{3}$$

то

$$\int f\, dG \leqslant \int g\, dG. \tag{4}$$

Это свойство называется *свойством монотонности интеграла.*

4. *Если функция* f *интегрируема на множестве* G, *множество* $G' \subset G$ *измеримо и* $G'' = G \backslash G'$, *то*

$$\int f\, dG = \int f\, dG' + \int f\, dG''. \tag{5}$$

Это свойство называется *аддитивностью интеграла по множествам интегрирования.*

Первое свойство очевидное. Свойство линейности следует из того, что этим свойством обладают интегральные суммы Римана. Действительно, для любого разбиения τ множества G и любого выбора точек $\boldsymbol{\xi}$

$$\sigma(\alpha f + \beta g; \tau; \boldsymbol{\xi}) = \alpha\sigma(f; \tau; \boldsymbol{\xi}) + \beta\sigma(g; \tau; \boldsymbol{\xi}).$$

Отсюда в пределе при $|\tau| \to 0$ (по любой римановой последовательности разбиений $\{\tau_k\}$) получаем равенство (2).

Третье свойство следует из того, что если выполнено условие (3), то

$$\sigma(f; \tau; \boldsymbol{\xi}) \leqslant \sigma(g; \tau; \boldsymbol{\xi}) \quad \forall\, \tau$$

при любом выборе точек $\boldsymbol{\xi}$.

Докажем формулу (5). Пусть $\{\tau'_k\}$ и $\{\tau''_k\}$ — римановы последовательности разбиений множеств G' и G''. Тогда $\tau_k = \tau'_k \cup \tau''_k$ — разбиение множества G, причем

$$\sigma(f; \tau_k; \boldsymbol{\xi}) = \sigma(f; \tau'_k; \boldsymbol{\xi}) + \sigma(f; \tau''_k; \boldsymbol{\xi}).$$

Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем равенство (5).

Как следствия из доказанных основных свойств получаются и все другие свойства кратных интегралов. Сформулируем и докажем наиболее важные из них.

5. *Если функция f интегрируема на множестве G, то*

$$\left|\int f\,dG\right| \leqslant \int |f|\,dG. \tag{6}$$

Действительно, так как функция $|f|$ интегрируема на G и

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad \forall\, x \in G,$$

то, в силу свойства 3,

$$-\int |f|\,dG \leqslant \int f\,dG \leqslant \int |f|\,dG,$$

что равносильно неравенству (6).

6. *Если функция f интегрируема на множестве G и*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall\, x \in G, \tag{7}$$

то

$$m \cdot mG \leqslant \int f\,dG \leqslant M \cdot mG. \tag{8}$$

Неравенства (8) получаются из неравенств (7) последовательным применением свойств 3 и 1.

7. *Если функция f непрерывна на измеримом замкнутом связном множестве G, то*

$$\exists\, \xi \in G: \quad \int f\,dG = f(\xi)mG. \tag{9}$$

Это утверждение называется *теоремой о среднем для интегралов.*

В случае $mG = 0$ равенство (9) очевидное. Пусть $mG > 0$,

$$m = \inf f(x), \quad M = \sup f(x).$$

Тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M$, и поэтому

$$m \leqslant \frac{1}{mG}\int f\,dG \leqslant M.$$

А так как f принимает все значения из отрезка $[m; M]$, то

$$\exists\, \xi \in G: \quad f(\xi) = \frac{1}{mG}\int f\,dG,$$

что и доказывает утверждение (9).

8. *Если функция f непрерывна, а функция g неотрицательна и интегрируема на замкнутом связном множестве G, то*

$$\exists \xi \in G: \quad \int fg\, dG = f(\xi) \int g\, dG.$$

Это утверждение тоже называется *теоремой о среднем* и доказывается точно так же, как и предыдущее утверждение.

9. *Пусть измеримые множества G и G_k, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} m(G \backslash G_k) = \lim_{k\to\infty} m(G_k \backslash G) = 0.$$

Тогда, если функция f определена и интегрируема на любом из этих множеств, то

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dG_k = \int f\, dG. \tag{10}$$

Действительно, так как

$$\int f\, dG - \int f\, dG_k = \int f d(G\backslash G_k) - \int f d(G_k \backslash G)$$

и, следовательно,

$$\left| \int f\, dG - \int f\, dG_k \right| \leqslant \|f\| m(G\backslash G_k) + \|f\| m(G_k\backslash G).$$

Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем равенство (10).

10. *Если последовательность функций f_k, интегрируемых на множестве G, сходится равномерно на G к функции f, то f интегрируема на G и*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k\, dG = \int f\, dG. \tag{11}$$

Интегрируемость предельной функции f доказана в п.2.2. Равенство (11) следует из того, что

$$\left| \int f_k\, dG - \int f\, dG \right| \leqslant \int |f_k - f|\, dG \leqslant \|f_k - f\| mG \to 0$$

при $k \to \infty$.

§ 3. Вычисление и преобразование кратных интегралов

3.1. Сведение кратного интеграла к повторному. Сначала рассмотрим интегралы от функций двух переменных по клетке. Как всегда, все интегрируемые функции будем считать ограниченными.

Теорема 1. *Если функция $f(x,y)$ интегрируема на клетке $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ и при каждом фиксированном $x \in \Delta'$ функция $f(x,y)$ интегрируема по y на Δ'', то функция*

$$\Phi(x) = \int\limits_{\Delta''} f(x,y)\,dy$$

интегрируема на Δ' и

$$\int\limits_{\Delta'} \Phi(x)\,dx = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть

$$\tau' = \{\Delta_1', \ldots, \Delta_{N'}'\} \text{ и } \tau'' = \{\Delta_1'', \ldots, \Delta_{N''}''\}$$

— некоторые разбиения Δ' и Δ'' соответственно. Через τ обозначим множество всех множеств $\Delta_{ij} = \Delta_i' \times \Delta_j''$. Очевидно, что τ — разбиение клетки Δ. Не ограничивая общности, можно считать, что все Δ_i', Δ_j'', а следовательно, и Δ_{ij}, являются клетками.

Рассмотрим интегральную сумму Римана для функции $\Phi(x)$ и разбиения τ':

$$\sigma(\Phi; \tau'; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N'} \Phi(\xi_i) m\Delta_i', \tag{2}$$

где $\xi_i \in \Delta_i'$. Здесь

$$\Phi(\xi_i) = \int\limits_{\Delta''} f(\xi_i, y)\,dy = \sum_{j=1}^{N''} \int\limits_{\Delta_j''} f(\xi_i, y)\,dy.$$

Поэтому если $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in\Delta_{ij}} f(x,y)$, $\quad M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in\Delta_{ij}} f(x,y)$, то

$$\sum_{j=1}^{N''} m_{ij} m\Delta_j'' \leqslant \Phi(\xi_i) \leqslant \sum_{j=1}^{N''} M_{ij} m\Delta_j''. \tag{3}$$

Далее, так как $m\Delta_i' \cdot m\Delta_j'' = m\Delta_{ij}$, то из (2) и (3) получаем неравенства:

$$s(f;\tau) \leqslant \sigma(\Phi; \tau'; \boldsymbol{\xi}) \leqslant S(f;\tau),$$

справедливые при любом выборе точек $\xi_i \in \Delta_i'$. Следовательно,

$$s(f;\tau) \leqslant s(\Phi;\tau') \leqslant S(\Phi;\tau') \leqslant S(f;\tau). \qquad (4)$$

Пусть теперь $\{\tau_k'\}$, $\{\tau_k''\}$ — некоторые последовательности разбиений множеств Δ' и Δ'', у которых $|\tau_k'| \to 0$, $|\tau_k''| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда, если $\{\tau_k\}$ — соответствующая последовательность разбиений множества Δ, то $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$, так как

$$|\tau_k| \leqslant \sqrt{|\tau_k'|^2 + |\tau_k''|^2}.$$

Подставим в (4) τ_k и τ_k' вместо τ и τ' и перейдем к пределу при $k \to \infty$. В результате получим, что функция $\Phi(x)$ интегрируема на Δ' и справедлива формула (1). Теорема 1 доказана.

Формула (1) обычно записывается в следующем виде:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\Delta'} dx \int\limits_{\Delta''} f(x,y)\,dy. \qquad (5)$$

Правая часть этой формулы называется *повторным интегралом*, в котором интегрирование ведется сначала по y, а затем по x.

Аналогично доказывается и другая *формула сведения кратного интеграла по $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ к повторному*:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\Delta''} dy \int\limits_{\Delta'} f(x,y)\,dx. \qquad (6)$$

Для справедливости этой формулы нужно потребовать, чтобы при каждом фиксированном $y \in \Delta''$ функция $f(x,y)$ была интегрируема по x на Δ', т.е. чтобы при любом $y \in \Delta''$ существовал внутренний интеграл в правой части формулы (6).

Пример 1. Для функции f двух переменных x и y, определенной и непрерывной на прямоугольнике $\Delta = [a;b] \times [c;d]$, напишем формулы сведения кратного интеграла к повторным.

Очевидно, функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 1 как по переменной x, так и по y, поэтому

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx,$$

что и требовалось написать. Иногда это требование для краткости выражают следующим образом: «расставить пределы интегрирования в кратном интеграле».

Заметим, что ни в формулировке теоремы 1, ни в ее доказательстве нигде не говорится и не используется, что клетки Δ' и Δ'' одномерные. Ничего не изменится, если считать, что Δ' — m-мерная клетка, $m < n$, а Δ'' — $(n-m)$-мерная клетка, и, соответственно, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-m})$.

Таким образом, теорема 1 справедлива и для функций от n переменных. В этом случае формулу (1) удобно записывать так:

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta'} dx' \int\limits_{\Delta''} f(x)\,dx'', \tag{7}$$

где x' — набор каких-то m координат точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $m < n$, а x'' — набор оставшихся $n - m$ координат.

Пример 2. Расставим пределы интегрирования в интеграле

$$\iiint\limits_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где $\Delta = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3]$, и функция f определена и непрерывна на Δ.

Очевидно, для $\Delta' = [a_1; b_1]$ и $\Delta'' = [a_2; b_2] \times [a_3; b_3]$ выполнены все условия теоремы 1, поэтому по формуле (7) получаем:

$$\iiint\limits_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\Delta'} dx \iint\limits_{\Delta''} f(x,y,z)\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\Delta''} dy\,dz \int\limits_{\Delta'} f(x,y,z)\,dx.$$

Здесь к двойному интегралу по Δ'' снова можно применить формулу (1) (или формулу (7)), поэтому

$$\iiint\limits_{\Delta} f\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f\,dz = \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} dz \int\limits_{a_1}^{b_1} f\,dx.$$

Очевидно, n-кратный интеграл $n!$ способами можно свести к n однократным интегралам.

Сформулируем и докажем формулу сведения кратного интеграла к повторному для произвольного измеримого множества G точек (x, y).

Через G' обозначим множество всех x, удовлетворяющих условию: существует y такое, что $(x, y) \in G$. Это множество называется *проекцией множества* G на подпространство x-в. А через $G(x)$ обозначим множество всех y таких, что $(x, y) \in G$. Тогда

$$G = \{(x, y) : \quad x \in G', \ y \in G(x)\}.$$

Теорема 2. *Пусть множество G измеримо и такое, что измеримы множества G' и $G(x)$ при любом $x \in G'$. Тогда, если функция $f(x, y)$ интегрируема на G и при каждом фиксированном $x \in G'$ функция $f(x, y)$ интегрируема по y на $G(x)$, то функция*

$$\Phi(x) = \int\limits_{G(x)} f(x, y)\, dy$$

интегрируема на G' и

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{G'} dx \int\limits_{G(x)} f(x, y)\, dy. \tag{8}$$

Доказательство. Через Δ обозначим некоторую клетку, содержащую множество G. Пусть Δ' и Δ'' — проекции клетки Δ на подпространства x-в и y-в соответственно. Легко видеть, что функция $F(x, y)$, равная $f(x, y)$ на G и нулю вне G, на $\Delta = \Delta' \times \Delta''$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, поэтому для нее справедлива формула (5), из которой, очевидно, следует формула (8). Теорема 2 доказана.

Пример 3. Расставим пределы интегрирования в двойном интеграле по множеству G, ограниченному параболой $y = 2x^2$ и прямой $x + y = 1$ (рис. 11.1).

Так как

$$G = \left\{(x; y) : \ -1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 - x\right\},$$

то для функции $f(x, y)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{-1}^{1/2} dx \int\limits_{2x^2}^{1-x} f(x, y)\, dy.$$

Аналогично, так как

$$G = \left\{(x; y) : \quad 0 \leqslant y \leqslant 2, \quad -\sqrt{\frac{y}{2}} \leqslant x \leqslant \psi(y)\right\},$$

где $\psi(y)=\sqrt{\dfrac{y}{2}}$ для $y\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ и $\psi(y)=1-y$ для $y\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/2} dy\int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_{1/2}^{2} dy\int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

Пример 4. Напишем формулы сведения кратного интеграла к повторному для множества $G\subset\mathbb{R}^3$, ограниченного конической поверхностью $x^2+y^2=z^2$ и плоскостью $z=1$ (рис. 11.2).

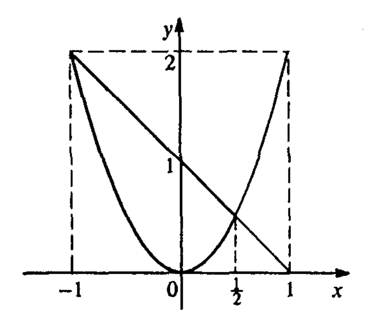


Рис. 11.1

Рис. 11.2

Пусть функция $f(x,y,z)$ удовлетворяет всем необходимым условиям. Тогда

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G'} dx\,dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz,$$

где $G'=\{(x;y):\quad x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Аналогично,

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{D} dy\,dz\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx,$$

где
$$D = \{(y; z): \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \ -z \leqslant y \leqslant z\}.$$

Здесь G' — проекция множества G на плоскость (x, y), а D — проекция на плоскость (y, z).

Пусть теперь $K(z)$ — круг радиуса z с центром в начале координат на плоскости (x, y). Тогда
$$G = \{(x, y, z): \quad z \in [0; 1], \quad (x, y) \in K(z)\}$$
и, следовательно,
$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{K(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Аналогично,
$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{-1}^1 dx \iint\limits_{G(x)} f(x, y, z)\, dy\, dz,$$
где $G(x)$ — множество на плоскости (y, z), ограниченное гиперболой $z^2 - y^2 = x^2$ и прямой $z = 1$. Отметим, что здесь $[0; 1]$ — проекция множества G на ось Oz, а $[-1; 1]$ — проекция на ось Ox.

3.2. Замена переменных в кратном интеграле в случае, когда меняется одна переменная. В этом пункте будем рассматривать простые отображения (см. п.2.3 главы 10), т.е. отображения $y = \Phi(x)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, задаваемые формулами
$$\begin{cases} y_i = x_i & \forall i \neq j, \\ y_j = \varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

Каждое такое отображение изменяет только одну координату. Например, отображение (1) изменяет только j-ю координату.

Будем предполагать, что функция $\varphi(x)$ на рассматриваемом множестве непрерывна и имеет непрерывную производную по x_j, причем
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \neq 0. \tag{2}$$

Для таких отображений сначала докажем лемму о мере образа клетки Δ.

Лемма 1. *Пусть $\Phi(\Delta)$ — образ клетки Δ при отображении (1), у которого функция $\varphi(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на замыкании клетки Δ. Тогда, если выполнено условие (2), то множество $\Phi(\Delta)$ измеримо и*

$$m\Phi(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right| dx. \quad (3)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $j = n$. Тогда из условия (2) следует, что в Δ производная $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ имеет один знак: либо > 0, либо < 0.

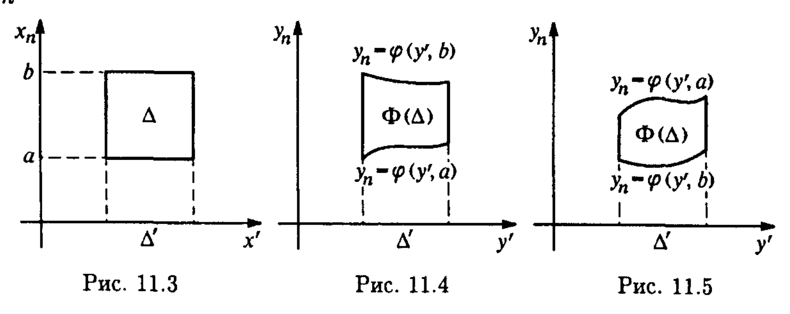


Рис. 11.3 Рис. 11.4 Рис. 11.5

На рис. 11.3 изображена клетка Δ, на рис. 11.4 изображено множество $\Phi(\Delta)$ в случае $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} > 0$, а на рис. 11.5 — в случае $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} < 0$, причем Δ' — проекция клетки Δ на подпространство точек $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Множество $\Phi(\Delta)$ измеримо, так как его граница состоит из конечного числа графиков непрерывных функций. Вычислим $m\Phi(\Delta)$.

Если $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} > 0$, то

$$m\Phi(\Delta) = \int\limits_{\Phi(\Delta)} dy = \int\limits_{\Delta'} dy' \int\limits_{\varphi(y',a)}^{\varphi(y',b)} dy_n = \int\limits_{\Delta'} \Big(\varphi(y', b) - \varphi(y', a)\Big)\, dy'.$$

Здесь мы воспользовались формулой сведения кратного интеграла к повторному. В полученном интеграле y' заменим на x'. Тогда

$$m\Phi(\Delta) = \int\limits_{\Delta'} dx' \int\limits_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\, dx_n = \int\limits_{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\, dx.$$

Если же $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} < 0$, то

$$m\Phi(\Delta) = \int\limits_{\Delta'} dx' \int\limits_a^b \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) dx_n = \int\limits_{\Delta} \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) dx.$$

Следовательно, во всех случаях

$$m\Phi(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right| dx.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть простое отображение* (1) *в некоторой δ-окрестности множества G непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и удовлетворяет условию* (2). *Тогда, если множество G измеримо, то множество $\Phi(G)$ тоже измеримо и*

$$m\Phi(G) = \int\limits_G |\det \Phi'(x)|\, dx, \tag{4}$$

где $\det \Phi'(x)$ *— якобиан отображения* (1).

Доказательство. Из леммы 1 следует, что наше утверждение справедливо для любой клетки Δ, у которой $\overline{\Delta} \subset O_\delta(G)$, так как для такой клетки выполнены все условия леммы 1 и якобиан простого отображения (1) равен $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$. Тогда оно справедливо для любого клеточного множества S такого, что $\overline{S} \subset O_\delta(G)$. Действительно, если S — объединение попарно не пересекающихся клеток $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$, то $\Phi(S)$ — объединение попарно не пересекающихся множеств $\Phi(\Delta_1), \ldots, \Phi(\Delta_N)$, и поэтому

$$m\Phi(S) = \sum_{i=1}^N m\Phi(\Delta_i) = \sum_{i=1}^N \int\limits_{\Delta_i} |J(x)|\, dx = \int\limits_S |J(x)|\, dx,$$

где $J(x) = \det \Phi'(x)$.

Таким образом, формула (4) доказана для клеточных множеств. Предельным переходом докажем ее для множества G.

Из измеримости множества G следует: существуют клеточные множества s_k и S_k такие, что $s_k \subset G \subset S_k$ и

$$\lim_{k\to\infty} ms_k = \lim_{k\to\infty} mS_k = mG.$$

7 Зак. 193

Можно считать, что $S_k \subset O_\delta(G) \quad \forall k$. Тогда

$$\Phi(s_k) \subset \Phi(G) \subset \Phi(S_k) \quad \forall k,$$
$$m\Phi(s_k) \leqslant \underline{m}\Phi(G) \leqslant \overline{m}\Phi(G) \leqslant m\Phi(S_k).$$

А так как

$$m\Phi(s_k) = \int\limits_{s_k} |J(x)|\,dx \longrightarrow \int\limits_G |J(x)|\,dx,$$
$$m\Phi(S_k) = \int\limits_{S_k} |J(x)|\,dx \longrightarrow \int\limits_G |J(x)|\,dx$$

при $k \to \infty$, то множество $\Phi(G)$ измеримо и справедлива формула (4). Лемма 2 доказана.

Заметим, что для клетки из условия (2) следует взаимная однозначность простого отображения (1). Однако для произвольного множества это утверждение является неверным, поэтому в лемме 2 (как и в следующей теореме), кроме выполнения условия (2), требуется еще, чтобы отображение было взаимно однозначным.

Теорема. *Пусть в некоторой окрестности измеримого множества G простое отображение (1) непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и удовлетворяет условию (2). Тогда, если функция $f(y)$ интегрируема на множестве $\Phi(G)$, то функция $f(\Phi(x))$ интегрируема на G и*

$$\int\limits_{\Phi(G)} f(y)\,dy = \int\limits_G f(\Phi(x))|\det\Phi'(x)|\,dx. \tag{5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что сложная функция $f(\Phi(x))$ интегрируема на G тогда и только тогда, когда интегрируема функция $F(x) = f(\Phi(x))|J(x)|$, где $J(x) = \det\Phi'(x)$. Действительно, функция $|J(x)|$ непрерывна на замыкании $\overline{G}$ ограниченного множества G, и поэтому, в силу условия (2), существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что $C_1 \leqslant |J(x)| \leqslant C_2 \quad \forall x \in \overline{G}$. Поэтому докажем интегрируемость функции $F(x)$.

Пусть $\tau = \{G_1, \ldots, G_N\}$ — некоторое разбиение множества G. Из леммы 2 следует, что множества $\Phi(G_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, измеримы и

$$m\Phi(G_i) = \int\limits_{G_i} |J(x)|\,dx.$$

Очевидно, множества $\Phi(G_i)$ образуют разбиение множества $\Phi(G)$ Обозначим его через $\widetilde{\tau}$ и рассмотрим соответствующие интегральные суммы Римана для функций $F(x)$ и $f(y)$:

$$\sigma(F;\tau;\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N} f(\eta^i)|J(\xi^i)|mG_i,$$

$$\sigma(f;\widetilde{\tau};\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^{N} f(\eta^i)m\Phi(G_i),$$

где $\xi^i \in G_i$, $\eta^i = \Phi(\xi^i)$.

Через $\omega(\delta)$ обозначим модуль непрерывности функции $|J|$ на компакте $\overline{G}$. Тогда, очевидно,

$$|\sigma(F;\tau;\boldsymbol{\xi}) - \sigma(f;\widetilde{\tau};\boldsymbol{\eta})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \|f\| \left| |J(\xi^i)|mG_i - \int\limits_{G_i} |J(x)|\,dx \right| \leqslant \|f\|\omega(|\tau|)mG. \quad (6)$$

Здесь $\omega(|\tau|) \to 0$ при $|\tau| \to 0$, так как функция $|J|$ непрерывна на компакте $\overline{G}$.

Пусть $\alpha(|\tau|) = \|f\|\omega(|\tau|)mG$. Тогда из двойного неравенства

$$\sigma(f;\widetilde{\tau};\boldsymbol{\eta}) - \alpha(|\tau|) \leqslant \sigma(F;\tau;\boldsymbol{\xi}) \leqslant \sigma(f;\widetilde{\tau};\boldsymbol{\eta}) + \alpha(|\tau|),$$

которое равносильно неравенству (6), следует, что

$$s(f;\widetilde{\tau}) - \alpha(|\tau|) \leqslant \sigma(F;\tau;\boldsymbol{\xi}) \leqslant S(f;\widetilde{\tau}) + \alpha(|\tau|)$$

для любого выбора $\boldsymbol{\xi}$ при заданном разбиении τ, и поэтому

$$s(f;\widetilde{\tau}) - \alpha(|\tau|) \leqslant s(F;\tau) \leqslant S(F;\tau) \leqslant S(f;\widetilde{\tau}) + \alpha(|\tau|) \quad (7)$$

для любого разбиения τ множества G.

Легко видеть, что для мелкости разбиения $\widetilde{\tau}$ справедлива оценка $|\widetilde{\tau}| \leqslant \omega_\Phi(|\tau|)$, где $\omega_\Phi(\delta)$ — модуль непрерывности отображения Φ на множестве $\overline{G}$. А так как оно непрерывно (а следовательно, и равномерно непрерывно) на ограниченном замкнутом множестве $\overline{G}$, то $\omega_\Phi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Следовательно, если $\{\tau_k\}$ — некоторая риманова последовательность разбиений множества G, то соответствующая последовательность $\{\widetilde{\tau}_k\}$ разбиений множества $\Phi(G)$ тоже будет римановой.

Для завершения доказательства в (7) вместо τ и $\widetilde{\tau}$ подставим τ_k и $\widetilde{\tau}_k$ и перейдем к пределу при $k \to \infty$. В результате получим что если f интегрируема на $\Phi(G)$, то F интегрируема на G и справедлива формула (5). Теорема доказана.

3.3. Теорема о мере образа при непрерывно дифференцируемом отображении и ее следствия. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение

$$y = \Phi(x), \tag{1}$$

которое некоторое множество пространства $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно отображает в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Пусть в некоторой δ-окрестности множества G отображение (1) непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и удовлетворяет условию:*

$$\det \Phi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in O_\delta(G). \tag{2}$$

Тогда, если множество G измеримо, то множество $\Phi(G)$ тоже измеримо и

$$m\,\Phi(G) = \int\limits_G |\det \Phi'(x)|\, dx. \tag{3}$$

Доказательство. Так как множество G измеримо, то оно ограничено, а его замыкание $\overline{G}$ компактно и $m\,\overline{G} = m\,G$. Через $O_\delta(G)$ обозначим δ-окрестность множества G, где выполняются условия теоремы. Очевидно, $O_\delta(G)$ будет δ-окрестностью и множества $\overline{G}$.

Из теоремы о расщеплении дифференцируемого отображения следует, что у любой точки $x_0 \in \overline{G}$ существует сферическая окрестность $O(x_0)$, в которой отображение (1), удовлетворяющее условию (2), имеет представление $y = B\,g_n\,(\ldots(g_2\,(g_1(x)))\ldots)$, где B — линейное отображение, которое изменяет только порядок координат, а g_k — простое непрерывно дифференцируемое отображение, меняющее только k-ю координату.

Выберем некоторую точку $x_0 \in \overline{G}$ и рассмотрим произвольное измеримое множество $\Omega_0 \subset O(x_0) \cap G$. Множество $\Phi(\Omega_0)$ измеримо, так как получается из Ω_0 с помощью конечного числа преобразований, каждое из которых измеримое множество переводит в измеримое. Докажем формулу (3) для множества $\Phi(\Omega_0)$.

Пусть $\Omega_k = g_k\,(\Omega_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, $\Phi(\Omega_0) = B(\Omega_n)$, причем $m\Phi(\Omega_0) = m\Omega_n$.

Согласно лемме 2 из п.3.2,

$$m\,\Omega_n = \int\limits_{\Omega_{n-1}} |\det g_n{}'(\eta)|\, d\eta.$$

Отсюда по теореме о замене переменных в кратном интеграле в случае, когда меняется одна координата, получаем:

$$m\,\Omega_n = \int\limits_{\Omega_{n-2}} |\det g_n{}'(\eta)| \cdot |\det g_{n-1}{}'(\xi)|\, d\xi\,,$$

где $\eta = g_{n-1}(\xi)$, $\xi \in \Omega_{n-2}$. Поступая так и далее, в результате получим:

$$m\,\Omega_n = \int\limits_{\Omega_0} |\det \Phi'(x)|\,dx,$$

так как $\det B' \cdot \det g_n{}' \ldots \det g_1{}' = \det \Phi'$ и $|\det B'| = 1$.

Таким образом, у каждой точки $x_0 \in \overline{G}$ существует окрестность $O(x_0)$ такая, что для любого измеримого множества $\Omega_0 \subset O(x_0) \cap G$ справедлива формула (3). Семейство всех таких окрестностей, когда $x_0 \in \overline{G}$, является покрытием компакта $\overline{G}$. Из него можно выбрать конечное число окрестностей, которые тоже образуют покрытие множества $\overline{G}$. Обозначим их через $O^1, O^2, \ldots, O^N$ и рассмотрим множества $G_1 = O^1 \cap G$, $G_2 = (O^2 \cap G) \backslash G_1$ и, вообще,

$$G_j = (O^j \cap G) \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} G_k \right), \quad j = 2, \ldots, N.$$

Эти множества являются измеримыми, попарно непересекающимися и такими, что

$$\bigcup_{j=1}^{N} G_j = G, \quad G_j \subset O^j \quad \forall j.$$

Из взаимной однозначности отображения (1) следует, что множества $\Phi(G_j)$, $j = 1, \ldots, N$, попарно не пересекаются, причем:

$$\Phi(G) = \bigcup_{j=1}^{N} \Phi(G_j).$$

Заметим, что некоторые из множеств G_j могут быть пустыми; в этом случае полагаем, что образ пустого множества есть пустое множество.

Выше было доказано, что каждое множество $\Phi(G_j)$ измеримо и для него справедлива формула (3), поэтому множество $\Phi(G)$ тоже измеримо и

$$m\,\Phi(G) = \sum_{j=1}^{N} m\,\Phi(G_j) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{G_j} |\det \Phi'(x)|\,dx = \int\limits_{G} |\det \Phi'(x)|\,dx.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в некоторой окрестности точки x_0 отображение* (1) *непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет условию:*

$$\det \Phi'(x_0) \neq 0, \tag{4}$$

то

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{m\,\Phi\,(O_\delta(x_0))}{m\,O_\delta\,(x_0)} = |\det \Phi'(x_0)|, \tag{5}$$

т.е. модуль якобиана отображения в точке x_0 равен коэффициенту искажения (растяжения или сжатия) меры в этой точке.

Доказательство. Из локальной обратимости отображения $y = \Phi(x)$, удовлетворяющего условию (4), следует, что существует $\delta > 0$ такое, что отображение взаимно однозначно на $O_{2\delta}(x_0)$ и

$$\det \Phi'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in O_{2\delta}(x_0).$$

Тогда, в силу доказанной теоремы, множество $\Phi(O_\delta(x_0))$ измеримо и

$$m\,\Phi(O_\delta(x_0)) = \int\limits_{O_\delta(x_0)} |\det \Phi'(x)|\,dx.$$

А так как функция $|\det \Phi'(x)|$ непрерывна на $O_\delta(x_0)$, то, согласно теореме о среднем, существует $\xi \in O_\delta(x_0)$ такое, что

$$m\,\Phi(O_\delta(x_0)) = |\det \Phi'(\xi)| \cdot m\,O_\delta(x_0).$$

Отсюда следует, что в точке x_0 справедливо равенство (5). Следствие 1 доказано.

Про формулу (5) говорят, что она определяет *геометрический смысл модуля якобиана отображения*, а именно, она показывает, что модуль якобиана отображения равен коэффициенту искажения (растяжения или сжатия) меры в рассматриваемой точке.

У любого отображения $y = \Phi(x)$ множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ можно считать, что образы и прообразы лежат в одном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом случае отображение часто называют *преобразованием*; оно множество $G \subset \mathbb{R}^n$ преобразует в множество $\Phi(G) \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим линейное преобразование, т.е. преобразование, заданное формулами:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Через A обозначим матрицу этого преобразования. Из линейной алгебры известно, что оно взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Следствие 2. *Пусть линейное преобразование* $y = \Phi(x)$, *заданное формулами* (6), *удовлетворяет условию:* $\det A \neq 0$. *Тогда, если множество* G *измеримо, то множество* $\Phi(G)$ *тоже измеримо и*

$$m\,\Phi(G) = |\det A| \cdot m\,G.$$

Из этого утверждения следует, что *мера Жордана инвариантна относительно группы движений евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$.

Пример. Получим формулу для объема n-мерного параллелепипеда, построенного на данных n векторах.

Напомним соответствующее определение из линейной алгебры. Для любых заданных n линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ и любой точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ множество точек с радиус-векторами

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{a}_j, \tag{7}$$

где $0 < \xi_j < 1$ для любого $j = 1, 2, \ldots, n$, называется *n-мерным параллелепипедом, построенным на векторах* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (или *натянутым на эти векторы*) и обозначается $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Пусть вектор $\mathbf{a}_j$ имеет координаты $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$, где $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда векторное равенство (7) задает линейное преобразование, которое точку ξ с координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ переводит в точку x с координатами

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где b_i — i-я координата точки M_0. Следовательно, рассматриваемый n-мерный параллелепипед P является образом n-мерного единичного куба при линейном отображении (8), и поэтому

$$mP(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = |\det A|, \tag{9}$$

где A — матрица линейного отображения (8).

Отметим частные случаи формулы (9).

Если $n = 1$, то, очевидно, $mP(\mathbf{a}_1) = |\mathbf{a}_1|$. Если же $n = 2$, то

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

поэтому $|\det A| = |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|$, где $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Следовательно, $mP(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|$. Наконец, если $n = 3$, то $mP(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = |(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)|$, где $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ — смешанное произведение векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

3.4. Теоремы о замене переменных в кратном интеграле. Сначала сформулируем теорему о замене переменных в кратном интеграле в случае, когда отображение, осуществляющее замену, определено, взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности рассматриваемого множества.

Теорема 1. *Пусть в некоторой δ-окрестности множества G отображение $y = \Phi(x)$ непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и удовлетворяет условию:*

$$\det \Phi'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in O_\delta(G).$$

Тогда, если функция $f(y)$ интегрируема на множестве $\Phi(G)$, то функция $f(\Phi(x))$ интегрируема на G и

$$\int\limits_{\Phi(G)} f(y)\,dy = \int\limits_{G} f(\Phi(x))\,|\det\,\Phi'(x)|\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. По условию функция $f(y)$ интегрируема на множестве $\Omega = \Phi(G)$, поэтому оно измеримо. Обратное отображение $x = \Phi^{-1}(y)$, $y \in \Omega$, как легко видеть, удовлетворяет всем условиям теоремы о мере образа. Следовательно, если множество Ω измеримо, то множество $G = \Phi^{-1}(\Omega)$ тоже измеримо. Далее доказательство сформулированной теоремы дословно повторяет доказательство теоремы из пункта 3.2. Теорема 1 доказана.

В доказанной теореме независимые переменные функции f обозначены буквой y. Однако вместо y иногда удобно писать x и считать, что замена переменных осуществляется по формуле $x = x(\xi)$, $\xi \in \Omega$. Тогда теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1$'$. *Пусть отображение $x = x(\xi)$ в некоторой δ-окрестности множества Ω непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и такое, что*

$$\det x'(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in O_\delta(\Omega).$$

Тогда, если G — образ множества Ω при этом отображении, то для любой функции $f(x)$, $x \in G$, справедлива формула

$$\int\limits_{G} f(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} f(x(\xi))|\det x'(\xi)|\,d\xi. \tag{2}$$

Ее следует понимать так: если функция $f(x)$ интегрируема на множестве G, то сложная функция $f(x(\xi))$ интегрируема на Ω и справедливо равенство (2). И наоборот, если $f(x(\xi))$ интегрируема на Ω, то $f(x)$ интегрируема на G и справедливо (2).

В случае $n = 2$ независимые переменные функции f естественно обозначать через x, y, а новые переменные — через ξ, η. Тогда, если отображение, заданное формулами

$$x = \varphi(\xi,\eta),\ y = \psi(\xi,\eta),$$

в окрестности множества Ω удовлетворяет условиям теоремы, то

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega f(\varphi(\xi,\eta),\ \psi(\xi,\eta)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| d\xi\,d\eta, \qquad (3)$$

где G — образ множества Ω.

Пример 1. Вычислим интеграл

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)^\alpha\,dx\,dy, \quad \alpha > 0,$$

где G — часть кругового кольца $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$, лежащая в первом квадранте плоскости (x,y).

Очевидно, множество G является образом прямоугольника $\Omega = [1;\sqrt{2}] \times \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ плоскости (ρ,φ) при отображении

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \qquad (4)$$

Это отображение удовлетворяет всем условиям теоремы 1: оно в окрестности множества Ω непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и такое, что

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \rho > \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)^\alpha\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega \rho^{2\alpha}\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \rho^{2\alpha+1}d\rho = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\alpha+2}\,(2^{\alpha+1}-1).$$

Заметим, что отображение (4) на множестве $\Omega_0 = [0;1]\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ не удовлетворяет условиям теоремы 1, однако если функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве

$$G_0 = \{(x;y) : x^2+y^2 \leqslant 1, \quad x > 0, \quad y > 0\},$$

то легко доказывается, что

$$\iint\limits_{G_0} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Этот пример показывает, что условия теоремы 1 слишком ограничительны. Докажем одно обобщение этой теоремы, которого вполне хватает для практического применения формулы замены переменных в кратном интеграле.

Теорема 2. *Пусть отображение $y = \Phi(x)$, определенное и непрерывное на замыкании $\overline{G}$ открытого измеримого множества G, на G непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и, кроме того, его якобиан на G ограничен и отличен от нуля. Тогда, если функция $f(y)$ интегрируема на множестве $\Phi(G)$, то функция $f(\Phi(x))$ интегрируема на G и справедлива формула* (1).

Доказательство. В силу теоремы 1 функция $f(\Phi(x))$ интегрируема на любом измеримом замкнутом подмножестве множества G. С другой стороны, согласно нашему соглашению об ограниченности интегрируемых функций, функция $f(y)$ ограничена на множестве $\Phi(G)$, и поэтому функция $f(\Phi(x))$ ограничена на G. Следовательно, функция $f(\Phi(x))$ интегрируема на G. Осталось доказать формулу (1).

Так как множество G измеримо, то существует последовательность измеримых замкнутых множеств $G'_k \subset G$ таких, что

$$\lim_{k\to\infty} m\,(G\backslash G'_k) = 0.$$

Аналогично, существует последовательность измеримых замкнутых множеств $\Omega_k \subset \Phi(G)$ таких, что

$$\lim_{k\to\infty} m\,(\Phi(G)\backslash\Omega_k) = 0.$$

Из теоремы о мере образа следует, что множества $\Phi(G'_k)$ и $G''_k = \Phi^{-1}(\Omega_k)$ измеримы. Тогда множества $G_k = G'_k \bigcup G''_k$ и $\Phi(G_k)$ измеримы,

$$m(G\backslash G_k) \leqslant m(G\backslash G'_k),$$
$$m(\Phi(G)\backslash\Phi(G_k)) \leqslant m(\Phi(G)\backslash\Omega_k),$$

и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} mG_k = mG, \quad \lim_{k\to\infty} m\Phi(G_k) = m\Phi(G).$$

Легко проверяется, что для множеств G_k и $\Phi(G_k)$ выполнены все условия теоремы 1, поэтому для любого $k \in N$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\Phi(G_k)} f(y)\,dy = \int\limits_{G_k} f(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,dx,$$

из которого в пределе при $k \to \infty$ получается формула (1). Теорема 2 доказана.

Пример 2. В двукратном интеграле от функции $f(x,y)$ по множеству $G = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant R^2\}$ сделать замену переменных по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Прежде всего заметим, что при данном отображении множество G является образом замкнутого прямоугольника $\overline{\Omega} = [0;R] \times [0;2\pi]$. Это отображение непрерывно на $\overline{\Omega}$, но не является взаимно однозначным на $\overline{\Omega}$. Однако оно непрерывно дифференцируемо на открытом прямоуголь-

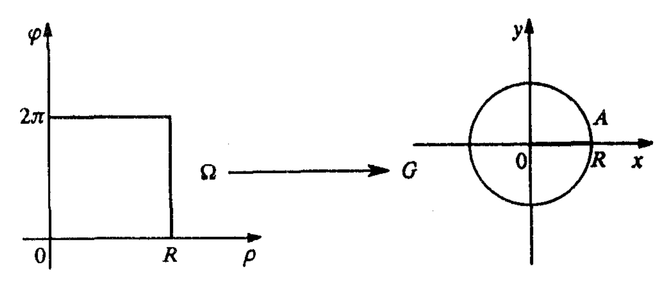


Рис. 11.6

нике $\Omega = (0;R) \times (0;2\pi)$, его якобиан, равный ρ, на Ω отличен от нуля, и, наконец, оно взаимно однозначно отображает Ω на открытый круг без радиуса OA (рис. 11.6).

Следовательно, если функция f интегрируема на G, то на $\overline{\Omega}$ выполнены все условия теоремы 2, и поэтому

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

В частности, если $f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha$, $\alpha > 0$, то

$$\iint\limits_G f\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^{2\alpha}\rho\,d\rho = 2\pi\frac{R^{2\alpha+2}}{2\alpha+2} = \frac{\pi}{\alpha+1}R^{2\alpha+2}.$$

Пример 3. Найдем объем n-мерного симплекса

$$T_n(h): x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \quad x_1 + \cdots + x_n \leqslant h.$$

Делая замену $x_1 = h\xi_1, \ldots, x_n = h\xi_n$, получаем

$$mT_n(h) = \int\limits_{T_n(h)} dx = h^n \int\limits_{T_n(1)} d\xi = h^n mT_n(1). \tag{5}$$

С другой стороны,

$$mT_n(1) = \int\limits_0^1 d\xi_n \int\limits_{T_{n-1}(1-\xi_n)} d\widetilde{\xi},$$

где $\widetilde{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. А так как, согласно формуле (5), внутренний интеграл равен $(1-\xi_n)^{n-1} mT_{n-1}(1)$, то,

$$mT_n(1) = mT_{n-1}(1) \cdot \int\limits_0^1 (1-\xi_n)^{n-1}\, d\xi_n = \frac{1}{n} mT_{n-1}(1).$$

Из этого рекуррентного соотношения получаем:

$$mT_n(1) = \frac{1}{n!} mT_1(1) = \frac{1}{n!},$$

так как $mT_1(1) = 1$. Таким образом,

$$mT_n(h) = \frac{h^n}{n!}.$$

Пример 4. Найдем объем n-мерного шара

$$K_n(R): x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2.$$

Обозначим этот объем $V_n(R)$. Тогда

$$V_n(R) = \int\limits_{K_n(R)} dx = R^n V_n(1),$$

где $V_n(1)$ — объем единичного n-мерного шара. Очевидно,

$$V_n(1) = \int\limits_{-1}^{+1} V_{n-1}\left(\sqrt{1-y^2}\right) dy = V_{n-1}(1) \int\limits_{-1}^{+1} (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dy.$$

Следовательно, $V_n(1) = 2J_n V_{n-1}(1)$, где

$$J_n = \int\limits_0^1 (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dy$$

Если $n = 2k+1$, то, интегрируя по частям, получаем:

$$J_{2k+1} = \int\limits_0^1 (1-y^2)^k\,dy = 2k\int\limits_0^1 (1-y^2)^{k-1}y^2\,dy = -2kJ_{2k+1} + 2kJ_{2k-1},$$

и поэтому

$$J_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}J_{2k-1}$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. А так как $J_1 = 1$, то из этой рекурентной формулы следует, что

$$J_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

Если же $n = 2k$, то сделав замену $y = \sin t$, получим

$$J_{2k} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2k} t\,dt$$

А в этом интеграле сделаем новую замену $\operatorname{tg} t = y$. Тогда

$$J_{2k} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем:

$$J_{2k-2} = 2k\int\limits_0^{+\infty} \frac{y^2\,dy}{(1+y^2)^{k+1}} = 2kJ_{2k-2} - 2kJ_{2k},$$

и поэтому

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2k}J_{2k-2}$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. А так как $J_0 = \frac{\pi}{2}$, то из этой рекурентной формулы следует, что

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

В результате получаем равенства

$$V_{2k+1}(1) = 2 \cdot \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} V_{2k}(1),$$

$$V_{2k}(1) = 2 \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} V_{2k-1}(1),$$

из которых следует, что

$$V_{2k}(1) = \frac{\pi}{k} \cdot V_{2k-2}(1),$$

$$V_{2k+1}(1) = \frac{2\pi}{2k+1} \cdot V_{2k-1}(1).$$

Таким образом,

$$V_{2k}(1) = \frac{\pi^{k-1}}{k!} \cdot V_2(1) = \frac{\pi^k}{k!},$$

$$V_{2k+1}(1) = \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \cdot V_1(1) = \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!}.$$

3.5. Криволинейные координаты. Пусть отображение

$$x = \Phi(\xi), \quad \xi \in \Omega, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами Ω и G. Тогда числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *криволинейными координатами точки* $x = \Phi(\xi)$. (Напомним, что $x_1, \ldots, x_n$ — это декартовы координаты точки x, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — декартовы координаты точки ξ.)

Рассмотрим криволинейные координаты на плоскости. Пусть отображение (1) задано формулами

$$x = \varphi(\xi, \eta),\ y = \psi(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Omega,$$

и пусть $G = \Phi(\Omega)$ (рис. 11.7).

На плоскости (x, y) кривые

$$\gamma_1 \begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta_0), \\ y = \psi(\xi, \eta_0), \end{cases} \qquad \gamma_2 \begin{cases} x = \varphi(\xi_0, \eta), \\ y = \psi(\xi_0, \eta), \end{cases}$$

называются *координатными линиями*, проходящими через точку M_0 с координатами $x_0 = \varphi(\xi_0, \eta_0)$, $y_0 = \psi(\xi_0, \eta_0)$. Точнее, они называются координатными линиями системы координат ξ, η. Заметим, что координатные линии могут быть и прямыми.

Таким образом, если задано взаимно однозначное отображение (1), то можно считать, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — криволинейные координаты точки $x = \Phi(\xi)$. И наоборот, $x_1, \ldots, x_n$ — криволинейные координаты точки $\xi = \Phi^{-1}(x)$.

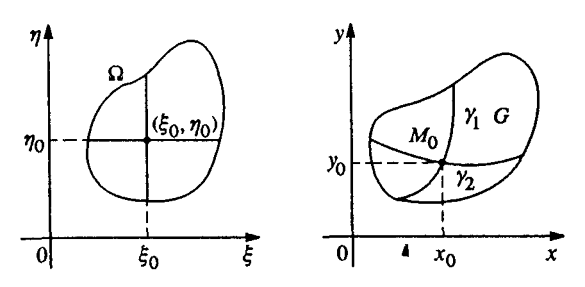


Рис. 11.7

Эта точка зрения на формулы преобразования переменных в интеграле соответствующим образом отражается на обозначениях и терминологии, связанных с интегрированием.

В случае $n = 2$ для интеграла по множеству G от функции $f(M)$ используются обозначения:

$$\iint\limits_G f(M)\,dS = \iint\limits_G f(M)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(M)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| d\xi\,d\eta,$$

где dS называется *элементом площади*, $dS = dx\,dy$ — *элементом площади в декартовых координатах* x, y, а

$$dS = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| d\xi\,d\eta$$

— *элементом площади в криволинейных координатах* ξ, η.

В случае $n = 3$:

$$\iiint\limits_G f(M)\,dV = \iiint\limits_G f(M)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_G f(M)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right| d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где dV — *элемент объема*, $dV = dx\,dy\,dz$ — *элемент объема в декартовых координатах* x, y, z, а

$$dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right| d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

— *элемент объема в криволинейных координатах* ξ, η, ζ. Аналогичные обозначения и терминология используются и в общем n-мерном случае.

Пример. На плоскости в полярных координатах:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

имеем $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$. В пространстве в сферических координатах:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\psi, \; y = \rho\sin\varphi\cos\psi, \; z = \rho\sin\psi,$$

где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, для элемента объема справедлива формула

$$dV = \rho^2\cos\psi\, d\rho\, d\varphi\, d\psi,$$

а в цилиндрических координатах —

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

§ 4. Несобственные кратные интегралы

4.1. Определения. Введем понятие кратного интеграла для функций, которые либо неограничены, либо определены на неизмеримых множествах.

Определение 1. Последовательность измеримых множеств G_k, $k \in \mathbb{N}$, называется *исчерпанием множества* $G \subset \mathbb{R}^n$, если она удовлетворяет условиям:

$$G_k \subset G_{k+1} \subset G \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ и } \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G.$$

Например, исчерпанием множества $G = \mathbb{R}^n$ является последовательность шаров радиуса $k \in \mathbb{N}$ с общим центром. Другим исчерпанием этого множества будет последовательность n-мерных кубов с ребром длины $k \in \mathbb{N}$ с центром в некоторой фиксированной точке $M_0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим еще множество рациональных точек отрезка $[0; 1]$. Оно является счетным, т.е. все его элементы можно перенумеровать: $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$. Тогда последовательность множеств $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, будет исчерпанием рассматриваемого множества, которое, как известно, не является измеримым по Жордану.

Отметим, что если $\{G_k\}$ — исчерпание некоторого множества G, то числовая последовательность $\{mG_k\}$ монотонно возрастает и поэтому всегда имеет конечный или бесконечный предел.

Лемма. *Если* $\{G_k\}$ *— исчерпание измеримого множества* G, *то*

$$\lim_{k\to\infty} mG_k = mG. \tag{1}$$

Доказательство. Так как $G_k \subset G \quad \forall k$, то $mG_k \leqslant mG$, и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} mG_k \leqslant mG. \qquad (2)$$

Докажем обратное неравенство.

Выберем некоторое $\varepsilon > 0$. В силу того, что множества G и G_k измеримы, у ∂G и ∂G_k существуют окрестности, такие что

$$mO(\partial G) < \varepsilon, \quad mO(\partial G_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Открытые множества $O(\partial G)$ и $\widetilde{G}_k = G_k \bigcup O(\partial G_k)$, $\quad k \in \mathbb{N}$, образуют покрытие замыкания $\overline{G}$ множества G. Тогда существует p такое, что множества $O(\partial G)$, $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_p$ образуют покрытие компакта $\overline{G}$. Очевидно, множества $G_p, O(\partial G), O(\partial G_1), \ldots, O(\partial G_p)$ тоже покрывают множество $\overline{G}$. Поэтому

$$mG \leqslant mG_p + mO(\partial G) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\varepsilon}{2^j} < mG_p + 2\varepsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует p такое, что

$$mG < mG_k + 2\varepsilon \quad \forall k \geqslant p.$$

Отсюда следует, что

$$mG < \lim_{k\to\infty} mG_k + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

и поэтому

$$mG \leqslant \lim_{k\to\infty} mG_k. \qquad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) получаем равенство (1). Лемма доказана.

Определение 2. Пусть задана функция $f(x)$, $x \in G$. Исчерпание $\{G_k\}$ множества G называется *допустимым для функции* f, если функция f интегрируема по Риману на любом множестве G_k.

Очевидно, для любой функции, непрерывной на $\mathbb{R}^n$, рассмотренные выше исчерпания множества $\mathbb{R}^n$ являются допустимыми. В качестве другого примера рассмотрим функцию f, непрерывную во всех точках открытого шара с центром в точке M_0, кроме точки M_0. Для нее допустимым исчерпанием является последовательность множеств

$$G_k = \left\{M : \frac{1}{k} \leqslant |MM_0| \leqslant 1 - \frac{1}{k}\right\}, \quad k \geqslant 3.$$

Если же функция f ограничена в окрестности точки M_0, то последовательность множеств

$$G_k = \left\{ M : |MM_0| \leqslant 1 - \frac{1}{k} \right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

тоже будет допустимым исчерпанием.

Определение 3. Пусть функция f такая, что для нее существует хотя бы одно допустимое исчерпание множества G, на котором она задана. Тогда, если для любого допустимого исчерпания $\{G_k\}$ предел

$$\lim_{k \to \infty} \int f \, dG_k$$

существует и не зависит от выбора исчерпания, то этот предел (конечный или бесконечный) называется *несобственным интегралом от функции f по множеству G* и обозначается

$$\int f \, dG \quad \text{или} \quad \int\limits_G f(x) \, dx. \tag{4}$$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_G f(x) \, dx = \lim_{k \to \infty} \int\limits_{G_k} f(x) \, dx. \tag{5}$$

Если, кроме того, этот предел конечен, то функция f называется *интегрируемой на множестве G в несобственном смысле*. В этом случае говорят, что *интеграл* (4) *сходится*, а в противном случае — *расходится*.

Из доказанной леммы и полной аддитивности интеграла Римана следует, что если функция f интегрируема на множестве G, то для любого исчерпания $\{G_k\}$ множества G справедливо равенство (5). Таким образом, если функция интегрируема по Риману на множестве G, то она на G интегрируема и в несобственном смысле, причем несобственный интеграл равен обычному интегралу Римана.

4.2. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. В определении несобственного кратного интеграла от функции f по множеству G говорится о всевозможных допустимых для f исчерпаний множества G. В общем случае совокупность всех таких исчерпаний необозрима, однако, как будет показано, достаточно рассмотреть какое-то одно допустимое исчерпание.

Теорема 1. *У любой неотрицательной функции $f(x)$, $x \in G$, для которой существует допустимое исчерпание $\{G_k\}$*

множества G, интеграл по G существует (конечный или бесконечный) и

$$\lim_{k\to\infty}\int f\,dG_k = \int f\,dG.$$

Доказательство. Так как числовая последовательность

$$\int f\,dG_k, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

монотонно возрастает, то она имеет конечный или бесконечный предел. Обозначим его A. Для доказательства теоремы нужно показать, что для любого другого допустимого исчерпания $\{G'_l\}$ множества G предел последовательности

$$\int f\,dG'_l, \quad l\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

равен A.

Сначала докажем, что если A' — предел последовательности (2), то $A'\leqslant A$. Для этого заметим, что последовательность множеств $G_{kl} = G_k\cap G'_l$, $k\in\mathbb{N}$, является исчерпанием множества G'_l, поэтому

$$\int f\,dG'_l = \lim_{k\to\infty}\int f\,dG_{kl} \leqslant \lim_{k\to\infty}\int f\,dG_k = A$$

для любого l и, следовательно, $A'\leqslant A$.

Последовательности (1) и (2) равноправны, поэтому аналогично доказывается, что $A\leqslant A'$. Теорема 1 доказана.

Пример 1. Найдем несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Будем исчерпывать плоскость $\mathbb{R}^2$ кругами

$$B_k = \{(x,y) : x^2+y^2<k^2\}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$\iint\limits_{B_k} e^{(-x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^k e^{-r^2}r\,dr = \pi(1-e^{-k^2}).$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi.$$

Рассмотрим еще исчерпание плоскости $\mathbb{R}^2$ квадратами $\Delta_k = \{(x,y) : |x| < k, \ |y| < k\}, \quad k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\iint\limits_{\Delta_k} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-t^2}\,dt\right)^2$$

и по теореме 1

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \pi.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Отметим, что последний интеграл часто встречается в приложениях. Он называется *интегралом Пуассона.*

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_B \frac{dx}{|x|^\alpha}$, где B — единичный n-мерный шар с центром в начале координат,

$$|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

При $\alpha > 0$ этот интеграл является несобственным. Исследуем, при каких α он сходится.

Очевидно, последовательность множеств

$$B_k = \left\{x : \frac{1}{k} < |x| < 1\right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

является допустимым исчерпанием шара B с выколотым центром. Для вычисления интеграла по B_k перейдем к полярным координатам:

$$\int\limits_{B_k} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int\limits_{\Delta} f(\varphi)\,d\varphi \int\limits_{1/k}^{1} \frac{1}{\rho^\alpha}\rho^{n-1}\,d\rho,$$

где $f(\varphi) = \cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$, $\Delta = [0;2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\times\dots\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Отсюда следует, что данный интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\alpha - n + 1 < 1$, т.е. когда $\alpha < n$.

Аналогично показывается, что интеграл $\int\limits_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ по внешности единичного n-мерного шара сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > n$.

Пример 3. Пусть $\delta(x)$ — функция Дирихле, равная 1, если x рациональное, и 0, если x иррациональное. Известно, что она не является интегрируемой по Риману на отрезке $[0;1]$. Она будет неинтегрируемой и в несобственном смысле, так как не существует ни одного допустимого для $\delta(x)$ исчерпания множества $[0;1]$. Однако, как легко видеть, она будет интегрируемой в несобственном смысле на множестве Q рациональных точек отрезка $[0;1]$, причем интеграл равен нулю.

Для несобственных интегралов от неотрицательных функций справедлив следующий *признак сравнения*.

Теорема 2. *Пусть функции f и g определены на множестве G, и пусть существуют допустимые для них исчерпания множества G. Тогда, если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in G$, то из сходимости интеграла от g следует сходимость интеграла от f, а из расходимости интеграла от f следует расходимость интеграла от g.*

Доказательство. Пусть $\{G'_k\}$ — допустимое для f исчерпание множества G, а $\{G''_k\}$ — допустимое для g исчерпание множества G. Легко видеть, что последовательность множеств $G_k = G'_k \cap G''_k$ является исчерпанием множества G, которое допустимо и для f и для g, причем

$$\int f\,dG_k \leqslant \int g\,dG_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2 доказана.

4.3. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Для изучения абсолютной сходимости интеграла от функции $f(x)$ рассмотрим функции

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Очевидно, $0 \leqslant f_\pm(x) \leqslant |f(x)|$,

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

Теорема 1. *Пусть для функции $f(x)$, $x \in G$, существует допустимое исчерпание множества G. Тогда, если интеграл от $|f(x)|$ по G сходится, то интеграл от $f(x)$ по G тоже сходится и*

$$\left| \int f\,dG \right| \leqslant \int |f|\,dG. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\{G_k\}$ — допустимое для f исчерпание множества G. Оно будет допустимым и для функций $|f|$, f_+, f_-. Из сходимости интеграла от $|f|$ следует сходимость интегралов от f_+ и f_-, а из их сходимости — сходимость интеграла от f. Теперь неравенство (1) очевидно. Теорема 1 доказана.

Теорему 1 кратко формулируют так: из абсолютной сходимости интеграла следует его сходимость. Это утверждение, как известно, справедливо и для несобственных интегралов от функций одного переменного. Однако для кратных интегралов справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если кратный интеграл от функции f по множеству G сходится, то интеграл от $|f|$ по G тоже сходится.*

Доказательство. Пусть $\{G_k\}$ — некоторое допустимое для f исчерпание множества G. Допустим, что интеграл от f по G сходится, а от $|f|$ расходится. Тогда интегралы от f_+ и f_- по G тоже расходятся, так как если, например, интеграл от f_+ сходится, то от f_- тоже сходится, а поэтому и от $|f|$ сходится, что противоречит допущению. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\int f_+\,dG_k = \lim_{k\to\infty}\int f_-\,dG_k = +\infty. \tag{2}$$

Построим новое допустимое для f исчерпание $\{G'_p\}$ множества G.

Из условия (2) следует, что существует G_{k_1} такое, что

$$\int f_+ d\Big(G_{k_1}\backslash G_1\Big) > -\int f\,dG_1 + 2. \tag{3}$$

Интеграл слева заменим нижней суммой Дарбу $s(f_+;\tau_1)$ такой, что

$$s(f_+;\tau_1) > \int f_+ d\Big(G_{k_1}\backslash G_1\Big) - 1, \tag{4}$$

и через g_1 обозначим объединение всех множеств разбиения τ_1, на которых $f_+>0$. Очевидно, множество g_1 измеримо, $g_1\subset G_{k_1}\backslash G_1$ и

$$\int f dg_1 = \int f_+ dg_1 \geqslant s(f_+;\tau_1). \tag{5}$$

Положим $G'_1 = G_1\cup g_1$. Тогда из (3), (4), (5) следует, что

$$\int f\,dG'_1 = \int f\,dG_1 + \int f dg_1 \geqslant \int f\,dG_1 + s(f_+;\tau_1) > 1.$$

Аналогично, существует G_{k_2} такое, что

$$\int f_+ d\Big(G_{k_2}\backslash G_{k_1}\Big) > -\int f\,dG_{k_1} + 3.$$

Интеграл слева заменим нижней суммой Дарбу $s(f_+;\tau_2)$ такой, что

$$s(f_+;\tau_2) > \int f_+ d\Big(G_{k_2}\backslash G_{k_1}\Big) - 1,$$

и через g_2 обозначим объединение всех множеств разбиения τ_2, на которых $f_+ > 0$. Множество g_2 измеримо, $g_2 \subset G_{k_2}\backslash G_{k_1}$ и

$$\int f dg_2 = \int f_+ dg_2 \geqslant s(f_+;\tau_2).$$

Положим $G_2' = G_{k_1} \cup g_2$. Тогда $\int f\, dG_2' > 2$.

Вообще, для любого G_{k_p} существует $G_{k_{p+1}}$ такое, что

$$\int f_+ d\Big(G_{k_{p+1}}\backslash G_{k_p}\Big) > -\int f\, dG_{k_p} + p + 2.$$

Интеграл слева заменим нижней суммой Дарбу $s(f_+;\tau_{p+1})$ такой, что

$$s(f_+;\tau_{p+1}) > \int f_+ d\Big(G_{k_{p+1}}\backslash G_{k_p}\Big) - 1,$$

и через g_{p+1} обозначим объединение всех множеств разбиения τ_{p+1}, на которых $f_+ > 0$. Положим $G'_{p+1} = G_{k_p} \cup g_{p+1}$. Тогда $\int f\, dG'_{p+1} > p + 1$. Таким образом по индукции строим исчерпание $\{G_p'\}$ множества G такое, что

$$\int f\, dG_p' > p \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что интеграл от f по множеству G расходится, и поэтому наше допущение о расходимости интеграла от $|f|$ по G неверное. Теорема 2 доказана.

Из доказанного утверждения, в частности, следует, что в случае $n = 1$ определение несобственного интеграла этого параграфа не эквивалентно введенному ранее определению для функций одного переменного. Это связано с тем, что ранее рассматривались допустимые исчерпания только специального вида.

Объединив утверждения теорем 1 и 2, получим следующий *критерий сходимости несобственных кратных интегралов.*

Теорема 3. *Для того чтобы интеграл от функции f по множеству G сходился, необходимо и достаточно, чтобы существовало допустимое исчерпание $\{G_k\}$ множества G такое, что последовательность интегралов от $|f|$ по G_k ограничена.*

Действительно, если интеграл от f по G сходится, то он сходится и от $|f|$, а тогда для любого допустимого для f исчерпания $\{G_k\}$ множества G последовательность интегралов от $|f|$ по G_k сходится.

Наоборот, если для некоторого допустимого для f исчерпания $\{G_k\}$ множества G последовательность интегралов от $|f|$ по G_k ограничена, то она имеет конечный предел. Тогда, в силу теоремы 1 из п. 2, интеграл от $|f|$ по G сходится, а по теореме 1 этого пункта будет сходиться и интеграл от f.

4.4. Свойства несобственных интегралов. Покажем, что несобственные кратные интегралы обладают обычными свойствами: линейности, монотонности и аддитивности по множествам.

1. *Если интегралы от функций f_1 и f_2 по множеству G сходятся, то интеграл от любой линейной комбинации $af_1 + bf_2$ по G тоже сходится и*

$$\int (af_1 + bf_2)\, dG = a\int f_1\, dG + b\int f_2\, dG. \qquad (1)$$

Действительно, из сходимости интегралов от f_1 и f_2 вытекает сходимость интегралов от $|f_1|$, $|f_2|$ и, следовательно, от $a|f_1|+b|f_2|$ и $af_1 + bf_2$. Тогда, если $\{G_k^1\}$ и $\{G_k^2\}$ — допустимые для f_1 и f_2 исчерпания множества G, то последовательность множеств $G_k = G_k^1 \cap G_k^2$ — допустимое для $af_1 + bf_2$ исчерпание множества G, причем справедливо равенство

$$\int (af_1 + bf_2)\, dG_k = a\int f_1\, dG_k + b\int f_2\, dG_k,$$

из которого в пределе при $k \to \infty$ следует равенство (1).

2. *Если интегралы от функций f_1 и f_2 по множеству G сходятся и $f_1(x) \leqslant f_2(x) \quad \forall x \in G$, то*

$$\int f_1\, dG \leqslant \int f_2\, dG. \qquad (2)$$

Действительно, если $\{G_k^1\}$ и $\{G_k^2\}$ — допустимые для f_1 и f_2 исчерпания множества G, то последовательность множеств $G_k = G_k^1 \cap G_k^2$ — допустимое исчерпание как для f_1, так и для f_2. А так как

$$\int f_1\, dG_k \leqslant \int f_2\, dG_k,$$

то отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем неравенство (2).

3. *Если интегралы от функции f по непересекающимся множествам G' и G'' сходятся, то интеграл от f по множеству $G = G' \cup G''$ тоже сходится и*

$$\int f\, dG = \int f\, dG' + \int f\, dG''. \qquad (3)$$

Действительно, из сходимости интегралов от f следует сходимость интегралов от $|f|$. Пусть $\{G'_k\}$ и $\{G''_k\}$ — допустимые исчерпания множеств G' и G''. Тогда последовательность множеств $G_k = G'_k \cup G''_k$ — допустимое исчерпание множества G, причем

$$\int |f|\, dG_k = \int |f|\, dG'_k + \int |f|\, dG''_k.$$

Отсюда следует, что интегралы от $|f|$ и от f по G сходятся. Теперь из равенства

$$\int f\, dG_k = \int f\, dG'_k + \int f\, dG''_k$$

в пределе при $k \to \infty$ получаем равенство (3).

В заключение докажем теорему о замене переменных в несобственном интеграле. Эта теорема является весьма полезным, хотя и достаточно простым обобщением теоремы 2 из п. 3.4 § 3.

Теорема. *Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $y = \Phi(x)$ с отличным от нуля якобианом взаимно однозначно отображает открытое множество G на множество $\Phi(G)$. Тогда, если интеграл от функции $f(y)$ по множеству $\Phi(G)$ сходится, то интеграл от функции $f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|$ по множеству G тоже сходится и*

$$\int\limits_{\Phi(G)} f(y)\, dy = \int\limits_{G} f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\, dx. \tag{4}$$

Доказательство. Открытое множество G можно исчерпать последовательностью ограниченных замкнутых множеств $\overline{G_k}$, каждое из которых есть объединение конечного числа замкнутых промежутков. Из теоремы о мере образа следует, что множества $\Phi(\overline{G_k})$ измеримы. Следовательно, если последовательность множеств $\overline{G_k}$ — допустимое исчерпание множества G, то последовательность множеств $\Phi(\overline{G_k})$ — допустимое исчерпание множества $\Phi(G)$. Тогда

$$\int\limits_{\Phi(\overline{G_k})} |f(y)|\, dy = \int\limits_{\overline{G_k}} |f(\Phi(x)) \det \Phi'(x)|\, dx, \tag{5}$$

что фактически и доказывает теорему.

Действительно, из сходимости интеграла от $f(y)$ следует сходимость интеграла от $|f(y)|$, а тогда, в силу равенства (5), интеграл от $|f(\Phi(x)) \det \Phi'(x)|$ по множеству G тоже сходится. Из

сходимости последнего интеграла следует сходимость интеграла от $f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|$ по множеству G. Теперь равенство (4) получается из равенства

$$\int\limits_{\Phi(\overline{G_k})} f(y)\,dy = \int\limits_{\overline{G_k}} f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\,dx$$

в пределе при $k \to \infty$. Теорема доказана.

Отметим, что если отображение $y = \Phi(x)$ на множестве G удовлетворяет условиям теоремы, то обратное отображение $x = \Phi^{-1}(y)$ на множестве $\Phi(G)$ удовлетворяет тем же условиям. Поэтому утверждение теоремы можно сформулировать следующим образом:

Если один из интегралов (4) *сходится, то второй тоже сходится и справедлива формула* (4).

4.5. Сведение кратного интеграла к повторному. Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную на множестве $G = [a;b) \times G'$, где G' — измеримое множество точек $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Будем предполагать, что функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на любом множестве вида $G_\eta = [a;\eta] \times G'$, где $a < \eta < b$. Кроме того, будем считать, что при любом фиксированном $x \in [a;b)$ функция $f(x,y)$ интегрируема по y на множестве G'. Очевидно, все эти условия выполнены, если множество $G' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ замкнуто, а функция $f(x,y)$ непрерывна на $G = [a;b) \times G'$.

Известно (см.п.3.1), что если функция $f(x,y)$ удовлетворяет перечисленным условиям, то функция

$$\varphi(x) = \int\limits_{G'} f(x,y)\,dy \tag{1}$$

интегрируема на отрезке $[a;\eta]$, и справедлива формула

$$\iint\limits_{G_\eta} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^\eta \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Из нее следует, что если интеграл от f по G сходится, то интеграл от φ тоже сходится и

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{G'} f(x,y)\,dy. \tag{3}$$

Для неотрицательной функции $f(x,y)$ верно и обратное утверждение.

Таким образом, интеграл от неотрицательной функции $f(x,y)$ по множеству G сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл от $\varphi(x)$. В этом случае справедлива формула (3).

Сделаем несколько замечаний относительно случая, когда функция $f(x,y)$ меняет знак. В общем случае из формулы (2) и сходимости интеграла от $\varphi(x)$ не следует сходимость интеграла от $f(x,y)$, так как формула (2) написана для специального исчерпания множества G. Однако интеграл от $f(x,y)$ будет сходиться, если сходится интеграл от функции

$$\psi(x) = \int\limits_{G'} |f(x,y)|\,dy.$$

Пример 1. Вычислим интеграл

$$J(\alpha) = \iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha},$$

который при $\alpha > 0$ является несобственным.

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$J(\alpha) = \iint\limits_{\Delta} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1-r^2)^\alpha},$$

где $\Delta = (0;1)\times(0;2\pi)$. Последний интеграл сведем к повторному:

$$J(\alpha) = \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1-r^2)^\alpha} = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{r\,dr}{(1-r^2)^\alpha}.$$

Из доказанных ранее утверждений следует, что данный интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{2r\,dr}{(1-r^2)^\alpha} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}.$$

А он сходится только при $\alpha < 1$.

Таким образом, если $\alpha \geqslant 1$, то $J(\alpha) = +\infty$, а если $\alpha < 1$, то

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{1-\alpha}.$$

Пример 2. Исследуем на сходимость интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}. \tag{4}$$

Ввиду симметрии достаточно рассмотреть интеграл по области G, определяемой неравенствами $x>0$, $y>0$, $x^2+y^2>1$.

Докажем сначала, что если $p \leqslant 0$ или $q \leqslant 0$, то данный интеграл расходится. Пусть, например, $p \leqslant 0$. Тогда

$$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{x^p+y^q} \geqslant \int\limits_1^\eta dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{x^p+y^q} \geqslant (\eta-1)\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^q}$$

для любого $\eta>1$, поэтому интеграл по G равен $+\infty$. Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда $q \leqslant 0$.

Таким образом, интеграл (4) может сходиться только тогда, когда $p>0$ и $q>0$. Заметим, что в этом случае интеграл по области G сходится или расходится одновременно с интегралом по области G^*, определяемой неравенствами $x>0$, $y>0$, $x^p+y^q>1$.

Переходя к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x=(r\cos^2\varphi)^{1/p}, \quad y=(r\sin^2\varphi)^{1/q},$$

получаем:

$$\iint\limits_{G^*} \frac{dx\,dy}{x^p+y^q} = \frac{2}{pq}\iint\limits_{\Delta} D(\varphi) r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\,d\varphi\,dr,$$

где $\Delta=(0;\frac{\pi}{2})\times(1;+\infty)$, $D(\varphi)=(\cos\varphi)^{2/p-1}(\sin\varphi)^{2/q-1}$.

Так как под интегралом по Δ стоит неотрицательная функция, то для его исследования достаточно рассмотрёть лишь одно, удобное нам, исчерпание множества Δ. В данном случае исчерпанием будет последовательность прямоугольников

$$\Delta_k=\left[\frac{1}{k};\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}\right]\times[1 \leqslant r \leqslant k], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Интеграл по Δ_k равен произведению

$$\int\limits_{1/k}^{\pi/2-1/k} D(\varphi)\,d\varphi \int\limits_1^k r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\,dr,$$

в котором первый сомножитель имеет конечный предел при $k \to \infty$ для любых $p>0$ и $q>0$. Пусть этот предел равен A. Очевидно,

$A > 0$. Следовательно, интеграл (4) сходится тогда и только тогда, когда $p > 0$, $q > 0$ и $1/p + 1/q < 1$.

В конце приведем еще пример, показывающий, что из сходимости повторных интегралов не следует сходимость кратного несобственного интеграла.

Пример 3. Покажем, что несобственный интеграл от функции $f(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$ по множеству $\Delta = (1,+\infty) \times (1,+\infty)$ расходится, а оба повторных интеграла сходятся.

Очевидно,

$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2 + y^2}\bigg|_1^{+\infty} = \frac{-1}{1 + y^2},$$

поэтому

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} f(x,y)\,dx = -\operatorname{arctg} y\bigg|_1^{+\infty} = -\frac{\pi}{4}.$$

Аналогично получаем:

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, оба повторных интеграла сходятся, однако не равны между собой.

Пусть теперь $\Delta(\xi,\eta) = (1,\xi) \times (1,\eta)$. Тогда

$$\iint\limits_{\Delta(\xi,\eta)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{\eta} dy \int_1^{\xi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx =$$

$$= \int_1^{\eta} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + y^2} - \frac{1}{1 + y^2}\right) dy = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{\xi} - \operatorname{arctg} y\right)\bigg|_1^{\eta} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\xi} - \operatorname{arctg}\eta + \operatorname{arctg} 1,$$

и поэтому если $\eta = \alpha\xi$, то при $\xi \to +\infty$ получаем предел $\operatorname{arctg}\alpha - \pi/4$, который зависит от α. Следовательно, интеграл от f по Δ расходится.

§ 5. Площадь поверхности

5.1. Площадь двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Пусть поверхность S задана непрерывно дифференцируемой векторной функцией

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D. \tag{1}$$

Тогда каждому квадрату $\Delta = [u, u + h] \times [v, v + h]$, лежащему в области D, на поверхности S соответствует некоторая фигура ΔS

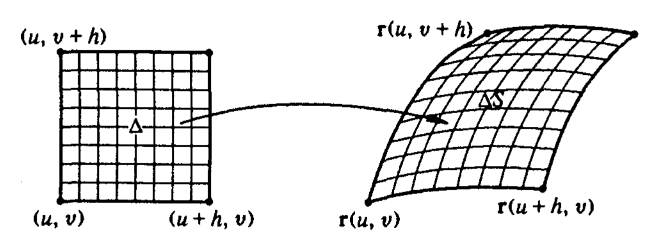


Рис. 11.8

(рис. 11.8), которую будем называть *криволинейным параллелограммом* с вершиной в точках

$$\mathbf{r}(u, v), \ \mathbf{r}(u + h, v), \ \mathbf{r}(u, v + h).$$

При достаточно малом h можно считать, что этот криволинейный параллелограмм мало отличается от параллелограмма, построенного на векторах

$$\Delta_u \mathbf{r} = \mathbf{r}(u + h, v) - \mathbf{r}(u, v), \quad \Delta_v \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v + h) - \mathbf{r}(u, v),$$

площадь которого равна $|[\Delta_u \mathbf{r}, \Delta_v \mathbf{r}]|$. А так как

$$\Delta_u \mathbf{r} = \mathbf{r}'_u(u, v)h + \mathbf{o}(h), \qquad \Delta_v \mathbf{r} = \mathbf{r}'_v(u, v) + \mathbf{o}(h)$$

при $h \to 0$, то

$$|[\Delta_u \mathbf{r}, \Delta_v \mathbf{r}]| = |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|h^2 + o(h^2)$$

при $h \to 0$. В результате получаем, что площадь криволинейного параллелограмма ΔS при малом h приближенно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}'_u h$ и $\mathbf{r}'_v h$ (рис. 11.9).

Плоскость параметров u, v прямыми, параллельными осям координат, разобьем на квадраты со стороной h и рассмотрим сумму

$$\sum |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]| h^2 \qquad (2)$$

по всем таким квадратам, целиком лежащим в области D. Будем считать, что площадь поверхности S равна пределу суммы (2) при $h \to 0$, а он, как известно, равен интегралу

$$\iint\limits_D |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|\, du\, dv, \qquad (3)$$

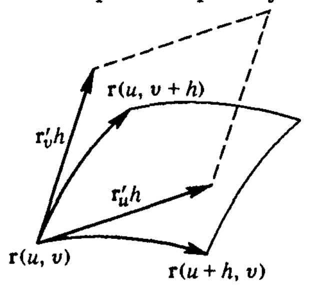


Рис. 11.9

(если, конечно, функция $|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|$ интегрируема). Покажем, что величина интеграла (3) не зависит от способа параметризации поверхности S.

Пусть формулы

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \widetilde{D},$$

задают допустимое преобразование параметров поверхности S. Здесь под допустимыми преобразованиями понимаются диффеоморфизмы с отличным от нуля якобианом. Тогда

$$\mathbf{r}'_\xi = \mathbf{r}'_u u'_\xi + \mathbf{r}'_v v'_\xi, \qquad \mathbf{r}'_\eta = \mathbf{r}'_u u'_\eta + \mathbf{r}'_v v'_\eta,$$

поэтому

$$[\mathbf{r}'_\xi, \mathbf{r}'_\eta] = [\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v] \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{\widetilde{D}} |[\mathbf{r}'_\xi, \mathbf{r}'_\eta]|\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{\widetilde{D}} |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi\, d\eta = \iint\limits_D |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|\, du\, dv.$$

Таким образом, хотя в интеграл (3) в явном виде входит параметризация поверхности S, однако его величина не зависит от способа параметризации.

Определение 1. Для любой поверхности S, заданной непрерывно дифференцируемой векторной функцией (1), величина, равная интегралу (3), называется *площадью поверхности* S и обозначается пл. S или μS.

Таким образом, по определению,

$$\mu S = \iint\limits_D |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]| \, du \, dv, \tag{4}$$

причем интеграл можно понимать как в собственном, так и в несобственном смысле. В частности, согласно этому определению, любая непрерывно дифференцируемая поверхность имеет площадь, конечную или бесконечную.

Покажем, что так определенная площадь поверхности обладает *свойством аддитивности.*

Пусть поверхность S задана векторной функцией (1). Область D кусочно-гладкой кривой γ разобьем на две области D_1 и D_2, и через S_1 и S_2 обозначим соответствующие им поверхности, а через Γ — образ кривой γ на поверхности S. В этом случае будем говорить, что *поверхность S кусочно-гладкой кривой Γ разбита на части S_1 и S_2.* Тогда свойство аддитивности площади поверхности следует из аддитивности двойного интеграла и формулируется следующим образом:

Если непрерывно дифференцируемая поверхность S кусочно-гладкой кривой разбита на две части S_1 и S_2, то

$$\mu S = \mu S_1 + \mu S_2.$$

Это свойство аддитивности площади поверхности делает естественным следующее определение.

Определение 2. Объединение S любой конечной совокупности поверхностей $S_1, \ldots, S_N$ называется *кусочно-непрерывной поверхностью*, а сумма площадей этих поверхностей называется *площадью поверхности* S и обозначается μS (или пл. S).

Таким образом, если поверхность S является объединением непрерывно дифференцируемых поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_N$, то, по определению,

$$\mu S = \sum_{j=1}^{N} \mu S_j.$$

Найдем выражение для площади поверхности S, которая является графиком непрерывно дифференцируемой функции

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D. \tag{5}$$

В этом случае

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}, \quad [\mathbf{r}'_x, \mathbf{r}'_y] = -f'_x(x, y)\mathbf{i} - f'_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$\text{пл.}\, S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy. \qquad (6)$$

В частности, если S — часть плоскости, заданной уравнением

$$z = Ax + By + C, \qquad (7)$$

то

$$\text{пл.}\, S = \sqrt{1 + A^2 + B^2}\, mD. \qquad (8)$$

Заметим, что плоскость (7) с координатной плоскостью x, y образуют угол γ, для которого

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}.$$

Тогда из равенства (8) следует, что

$$\text{пл.}\, S = \frac{mD}{\cos\gamma}.$$

Соответствующим образом можно записать и формулу (6):

$$\text{пл.}\, S = \iint\limits_D \frac{dx\, dy}{\cos\gamma},$$

где $\gamma = \gamma(x, y)$ — величина угла, который образует нормаль к поверхности (5) в точке (x, y) с координатной плоскостью x, y.

Пример 1. Вычислим площадь поверхности S, полученной вращением вокруг оси x графика неотрицательной непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$.

Эта поверхность вращения S задается векторной функцией

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} f(x)\cos\varphi + \mathbf{k} f(x)\sin\varphi,$$

где $x \in [a; b]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Следовательно,

$$[\mathbf{r}'_x, \mathbf{r}'_\varphi] = \mathbf{i} f(x) f'(x) - \mathbf{j} f(x)\cos\varphi - \mathbf{k} f(x)\sin\varphi,$$

$$|[\mathbf{r}'_x, \mathbf{r}'_\varphi]| = f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2},$$

и поэтому

$$\text{пл.}\, S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \qquad (9)$$

Отметим, что эта формула совпадает с уже известной формулой для площади поверхности вращения.

9 Зак. 193

Пример 2. Вычислим площадь поверхности S тора, которая получается вращением вокруг оси x окружности

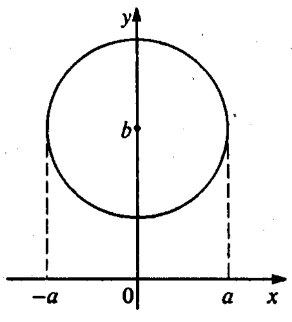


Рис. 11.10

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2,$$

где $0 < a < b$ (рис. 11.10).

Очевидно, площадь поверхности S равна сумме площадей поверхностей $S_\pm$, которые получаются вращением вокруг оси x графиков функций

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a; a].$$

По формуле (9) получаем:

$$\text{пл.}\, S = 2\pi \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = 4\pi b a \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi^2 ab.$$

5.2. Интеграл от функции по поверхности в пространстве. Пусть на непрерывной поверхности

$$S = \{\mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D\} \tag{1}$$

задана функция $f(P)$, $P \in S$. Заметим, что если поверхность S не имеет кратных точек, то f — это функция точки носителя поверхности S, т.е. определена на множестве $S \subset \mathbb{R}^3$. В общем случае поверхность (1) может иметь кратные точки, поэтому f — это, вообще говоря, функция точки $(u, v) \in D$, а не точки носителя поверхности (1).

Предположим, что область D измерима, а поверхность S непрерывно дифференцируема и имеет конечную площадь.

Определение 1. Для любого разбиения $\tau = \{D_1, \ldots, D_N\}$ области D множество поверхностей

$$S_i = \{\mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

называется *разбиением поверхности* (1) и обозначается $\tau(S)$.

Таким образом, по определению,

$$\tau(S) = \{S_1, \ldots, S_N\}, \tag{2}$$

где каждая поверхность S_i имеет конечную площадь, причем

$$\mu S_i = \iint\limits_{D_i} |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|\, du\, dv.$$

Определение 2. Для любого разбиения (2) поверхности (1) суммы

$$s(f;\tau) = \sum_{i=1}^{N} m_i \mu S_i, \quad S(f;\tau) = \sum_{i=1}^{N} M_i \mu S_i, \tag{3}$$

где

$$m_i = \inf_{P \in S_i} f(P), \quad M_i = \sup_{P \in S_i} f(P),$$

называются *интегральными суммами Дарбу функции f по поверхности S.*

Очевидно, эти суммы обладают всеми свойствами интегральных сумм Дарбу для функций двух переменных.

Определение 3. Если точные грани интегральных сумм Дарбу (3) конечны и

$$\sup_{\tau} s(f;\tau) = \inf_{\tau} S(f;\tau), \tag{4}$$

то функция f называется *интегрируемой по поверхности S*, а число (4) — *интегралом от функции f по поверхности S* и обозначается

$$\iint_S f\,dS.$$

Функция f называется *подынтегральной функцией*, а выражение dS — *элементом площади поверхности.*

Этот интеграл называют еще *поверхностным интегралом 1-го рода от функции f по поверхности S.*

Из определения следует, что поверхностные интегралы 1-го рода обладают всеми известными свойствами кратных интегралов. Предлагается сформулировать и доказать эти свойства в качестве упражнения.

Теорема 1. *Пусть поверхность* (1) *непрерывно дифференцируема, имеет конечную площадь и такая, что векторная функция $\mathbf{r}(u,v)$ непрерывна на замкнутой области $\overline{D}$. Тогда, если функция f непрерывна на поверхности*

$$\overline{S} = \{\mathbf{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\},$$

то она интегрируема по поверхности S и справедлива формула

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|\,du\,dv. \tag{5}$$

(Заметим, что выражение $|[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|\,du\,dv$ иногда называют *элементом площади поверхности в координатах u, v* и пишут

$$dS = |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]|\,du\,dv.)$$

Доказательство. Так как функция $f(\mathbf{r}(u,v))$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\overline{D}$, то она равномерно непрерывна на $\overline{D}$. Поэтому, если $\omega(f;\delta)$ — модуль непрерывности функции f, то

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(f;\delta)=0.$$

Следовательно, если $\{\tau_n\}$ — последовательность разбиений области D такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}|\tau_n|=0$, то

$$S(f;\tau_n)-s(f;\tau_n)\leqslant\omega(f;\tau_n)\mu S\to 0$$

при $n\to\infty$. Поэтому функция f интегрируема на S.

Докажем теперь формулу (5).

Для любого разбиения τ поверхности S имеем:

$$s(f;\tau)=\sum_{i=1}^{N}m_i\mu S_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\iint\limits_{D_i}|[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]|\,du\,dv\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\iint\limits_{D_i}f(\mathbf{r}(u,v))|[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]|\,du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{D}f(\mathbf{r}(u,v))|[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v|\,du\,dv\leqslant S(f;\tau).$$

Отсюда и из интегрируемости функции f на S следует формула (5). Теорема 1 доказана.

Как обычно, особый интерес представляет случай, когда поверхность S является графиком функции $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in D$. В этом случае $dS=\sqrt{1+\varphi_x^{2\prime}+\varphi_y^{2\prime}}\,dx\,dy$, и формула (5) принимает вид:

$$\iint\limits_{S}f\,dS=\iint\limits_{D}f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi_x^{2\prime}+\varphi_y^{2\prime}}\,dx\,dy.$$

Так же, как и для кратных интегралов, доказывается следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть поверхность* (1) *непрерывно дифференцируема и имеет конечную площадь. Тогда, если функция $f(P)$ непрерывна и ограничена на S, то она интегрируема на S и справедлива формула* (5).

Заметим, что формулу (5) иногда принимают за определение поверхностного интеграла 1-го рода. Как и при определении площади поверхности, можно показать, что это определение корректно (в том смысле, что величина интеграла не зависит от параметризации поверхности).

Отметим, что наряду с поверхностными интегралами от ограниченных функций по поверхностям, имеющим конечную площадь, можно рассматривать поверхностные интегралы как от неограниченных функций, так и по поверхностям бесконечной площади. Такие интегралы называются *несобственными*. Для каждой конкретной функции и заданной поверхности несобственные интегралы определяются естественным образом (по аналогии с несобственными кратными интегралами).

Пример 1. Найдем массу m сферы S радиуса R, если поверхностная плотность ρ в каждой ее точке равна расстоянию от этой точки до некоторого фиксированного диаметра.

Решение. По определению,

$$m = \iint_S \rho\, dS.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, введем декартову систему координат, приняв центр сферы за начало координат и направив ось z по заданному диаметру, а затем перейдем к сферическим координатам:

$$x = R\cos\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\cos\theta, \quad z = R\sin\theta.$$

Тогда

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = R\cos\theta, \quad dS = R^2\cos\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Следовательно,

$$m = \iint_S \rho\, dS = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \pi^2 R^3.$$

В конце дадим определение интеграла от функции по кусочно-дифференцируемой поверхности.

Пусть S — объединение непрерывно дифференцируемых параметрически заданных поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_N$. Тогда сумма интегралов от функции f по этим поверхностям называется *интегралом от функции f по поверхности S.*

Таким образом, по определению,

$$\iint_S f\, dS = \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} f\, dS.$$

Пример 2. Вычислим интеграл

$$J = \iint_S (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\, dS,$$

где S — поверхность, отсекаемая от конуса $z^2 = k^2(x^2+y^2)$ цилиндром $x^2+y^2 = 2ax$.

Решение. Пусть D — круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2ax$. Тогда поверхность S состоит из двух частей S_+ и S_-, которые являются графиками функций $z = \pm|k|\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$. Для этих поверхностей $dS = \sqrt{1+k^2}\,dx\,dy$, и поэтому

$$J = 2\sqrt{1+k^2}\iint\limits_D (k^2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2)\,dx\,dy.$$

В полярных координатах окружность $x^2+y^2=2ax$ задается уравнением $\rho = 2a\cos\varphi$, где $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, если $a>0$, и $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, если $a<0$. Поэтому

при $a>0$ имеем:

$$J = 2\sqrt{1+k^2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} (k^2\rho^4 + \rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{2}{6}\sqrt{1+k^2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (k^2+\cos^2\varphi\sin^2\varphi)(2a\cos\varphi)^6\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}(2a)^6\sqrt{1+k^2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (k^2\cos^6\varphi + \cos^8\varphi\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Вычислив этот интеграл, получим

$$J = \frac{\pi}{24}a^6\sqrt{1+k^2}(80k^2+7).$$

Аналогичный результат получается и в случае $a<0$.

5.3. Мера k-мерного параллелепипеда. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы k линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Как обычно, множество всех точек $M \in \mathbb{R}^n$ с радиус-векторами

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{k} \xi_j \mathbf{a}_j, \tag{1}$$

где $0 < \xi_j < 1$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$, называется *k-мерным параллелепипедом, построенным на векторах* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ (или *натянутым на эти векторы*) и обозначается $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

В этом пункте получим формулу для вычисления k-мерной меры параллелепипеда $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Отметим, что случай $k = n$ рассматривался в п. 3.3. Однако полученная там формула не обобщается на случай, когда $k < n$.

Через $\mathbb{R}^k$ обозначим k-мерное евклидово подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, которое натянуто на данные векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. В $\mathbb{R}^k$ выберем некоторый ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$, и через $\eta_1, \ldots, \eta_k$ обозначим координаты вектора $\mathbf{r}$ в формуле (1), а через $\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{kj}$ — координаты вектора $\mathbf{a}_j$ по этому базису. Тогда

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2}$$

Следовательно, рассматриваемый k-мерный параллелепипед P является образом k-мерного единичного куба при линейном отображении (2), поэтому его k-мерная мера вычисляется по формуле

$$mP(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = |\det A|, \tag{3}$$

где A — матрица отображения (2).

В отличие от случая $k=n$, в случае $k < n$ формула (3) является неудобнойдлявычисления меры параллелепипеда $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$, так как элементы матрицы A остаются неизвестными (в частности, они существенно зависят от выбора ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^k$).

Преобразуем формулу (3). Для этого заметим, что если A^* — транспонированная матрица отображения (2), то

$$A^*A = \\ = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{k1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \ldots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} = \|b_{ij}\|,$$

где $\|b_{ij}\|$ — квадратная матрица k-го порядка с элементами

$$b_{ij} = \sum_{l=1}^{k} \alpha_{li}\alpha_{lj}. \tag{4}$$

Через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ обозначим ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, который получается дополнением базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ в $\mathbb{R}^k$. В этом базисе вектор $\mathbf{a}_j$ имеет координаты $\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{kj}, 0, \ldots, 0$. Поэтому из (4) следует, что элемент b_{ij} равен скалярному произведению $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ векторов $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$. Таким образом,

$$A^*A = \|(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)\|.$$

А так как определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц, то

$$|\det A| = \sqrt{\det \|(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)\|}. \tag{5}$$

Из равенств (3) и (5) следует, что

$$mP(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = \sqrt{\det \|(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)\|}. \tag{6}$$

Как известно, матрица $\|(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)\|$ называется *матрицей Грама системы векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, а ее определитель — *определителем Грама* этой системы.

Таким образом, *определитель Грама системы из k векторов равен квадрату k-мерной меры параллелепипеда, построенного на этих векторах.*

Отметим частные формулы (6).

Если $k = 1$, а n любое, то, очевидно, $mP(\mathbf{a}_1) = |\mathbf{a}_1|$. Если же $k = 2$, а $n = 3$, то

$$\det \|(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)\| = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) - (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)^2 = \\ = |\mathbf{a}_1|^2|\mathbf{a}_2|^2\left(1 - \cos^2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\right) = |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|^2,$$

где $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, и поэтому

$$mP(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|.$$

Наконец, если $k = n = 3$, то

$$\det \|(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)\| = |\det A|^2 = |(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)|^2,$$

и поэтому

$$mP(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = |(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)|,$$

где $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ — смешанное произведение векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

5.4. Мера k-мерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. Пусть непрерывно дифференцируемое отображение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in D \subset \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_k)$, задает гладкую k-мерную поверхность S в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда каждой замкнутой k-мерной клетке

$$\Delta = \prod_{i=1}^{k}[t_i; t_i + \Delta t_i], \tag{2}$$

целиком лежащей в области D, на поверхности S соответствует некоторый "криволинейный параллелепипед" ΔS. При достаточно

малых Δt_i можно считать, что ΔS мало отличается от параллелепипеда, построенного на векторах $\Delta_i \mathbf{r}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где $\Delta_i \mathbf{r}$ — разность функции $\mathbf{r}(t)$ по переменной t_i с шагом Δt_i, т.е.

$$\Delta_i \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_1, \ldots, t_i + \Delta t_i, \ldots, t_k) - \mathbf{r}(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_k).$$

Как известно, объем этого параллелепипеда равен

$$\sqrt{\det \|(\Delta_i \mathbf{r}, \Delta_j \mathbf{r})\|},$$

где под корнем стоит определитель Грама векторов $\Delta_1 \mathbf{r}, \ldots, \Delta_k \mathbf{r}$. А так как

$$\Delta_i \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i} \Delta t_i + \mathbf{o}(\Delta t_i)$$

при $\Delta t_i \to 0$, то при достаточно малых $\Delta t_1, \ldots, \Delta t_k$

$$\det \|(\Delta_i \mathbf{r}, \Delta_j \mathbf{r})\| \approx \det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_j} \right) \right\| (m\Delta)^2,$$

где $\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_j} \right) \right\|$ — определитель Грама векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_k}$, а $m\Delta$ — мера k-мерной клетки (2).

Пространство $\mathbb{R}^k$, в котором лежит область D, разобьем на клетки и рассмотрим сумму

$$\sum \sqrt{\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_j} \right) \right\|} m\Delta \tag{3}$$

по всем замкнутым клеткам Δ, целиком лежащим в области D. Будем считать, что площадь k-мерной поверхности S равна пределу суммы (3), когда максимальный диаметр клеток стремится к нулю. А этот предел, как известно, равен интегралу

$$\int\limits_D \sqrt{\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_j} \right) \right\|} dt_1 \ldots, dt_k. \tag{4}$$

Покажем, что величина интеграла (4) не зависит от способа параметризации поверхности S. Здесь под допустимыми преобразованиями параметров понимаются диффеоморфизмы с отличным от нуля якобианом. Пусть

$$t = t(\xi), \quad \xi \in \widetilde{D}, \tag{5}$$

— допустимое преобразование параметров поверхности S. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial t_i}{\partial \xi_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k.$$

Легко проверяется, что

$$\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_\alpha}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_\beta} \right) \right\| = \det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_j} \right) \right\| \cdot J^2(\xi),$$

где $J(\xi)$ — якобиан диффеоморфизма (5):

$$J(\xi) = \frac{\partial(t_1, \ldots, t_k)}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_k)}.$$

Отсюда и из формулы замены переменных в кратном интеграле следует, что

$$\int\limits_{\widetilde{D}} \sqrt{\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_j} \right) \right\|} \, d\xi_1, \ldots, d\xi_k = \int\limits_D \sqrt{\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_\beta} \right) \right\|} \, dt_1, \ldots, dt_k.$$

Таким образом, хотя в интеграл (4) в явном виде входят параметры поверхности S, однако его величина не зависит от способа параметризации.

Определение 1. Для любой гладкой k-мерной поверхности S, заданной отображением (1), величина, равная интегралу (4), называется *площадью* или *k-мерной мерой поверхности S* и обозначается μS.

Таким образом, по определению,

$$\mu S = \int\limits_D \sqrt{\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_j} \right) \right\|} \, dt, \tag{6}$$

где интеграл можно понимать как в собственном, так и в несобственном смысле.

Покажем, что так определенная площадь гладкой k-мерной поверхности обладает *свойством аддитивности*.

Пусть поверхность S задана отображением (1), где D — область k-мерного пространства R^k, и пусть область D гладкой или кусочно-гладкой $(k-1)$-мерной поверхностью γ разбита на две области D_1 и D_2. Через S_1 и S_2 обозначим соответствующие им поверхности, а через Γ — образ поверхности γ на поверхности S. В этом случае будем говорить, что *k-мерная поверхность S кусочно-гладкой $(k-1)$-мерной поверхностью Γ разбита на части S_1 и S_2*. Тогда свойство аддитивности площади поверхности формулируется следующим образом:

Если гладкая k-мерная поверхность S кусочно-гладкой $(k-1)$-мерной поверхностью разбита на две части S_1 и S_2, то

$$\mu S = \mu S_1 + \mu S_2.$$

Определение 2. Для любой поверхности S, которая является суммой конечного числа гладких k-мерных поверхностей, сумма площадей этих поверхностей называется *k-мерной площадью* (или *мерой*) *поверхности S* и обозначается μS.

Рассмотрим частные случаи формулы (6).

При $k = 1$ область $D \subset \mathbb{R}^1$ — это некоторый промежуток Δ на прямой $\mathbb{R}^1$, а S — это кривая Γ в пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом случае $t_1 = t \in \Delta$, $(\mathbf{r}', \mathbf{r}') = |\mathbf{r}'(t)|^2$, а формула (6) превращается в формулу для вычисления длины кривой Γ:

$$\mu\Gamma = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt,$$

где a, b — концы промежутка Δ.

При $k = n$ матрица Якоби отображения (1) квадратная, а S — это область в пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом случае

$$\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_j} \right) \right\| = |\det \mathbf{r}'(t)|^2,$$

где $\mathbf{r}'(t)$ — матрица Якоби отображения (1), а формула (6) превращается в формулу

$$\mu S = \int_D |\det \mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_S dx = mS,$$

где mS — мера области S.

Наконец, если $n = 3$ и $k = 2$, то

$$\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_j} \right) \right\| = \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_2} \right] \right|^2,$$

и формула (6) принимает вид

$$\mu S = \iint_D \left| \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_2} \right] \right| dt_1\,dt_2.$$

Как обычно, особый интерес представляет случай, когда S — это $(n-1)$-мерная поверхность, являющаяся графиком функции

$$x_n = f(\widetilde{x}), \quad \widetilde{x} \in D, \tag{7}$$

где $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. В этом случае радиус-вектор $\mathbf{r}$ в формуле (6) имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(\widetilde{x})$. Следовательно,

$$\det \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} \right) \right\| = \begin{vmatrix} 1+f_1^2 & f_1 f_2 & \ldots & f_1 f_{n-1} \\ f_2 f_1 & 1+f_2^2 & \ldots & f_2 f_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1} f_1 & f_{n-1} f_2 & \ldots & 1+f_{n-1}^2 \end{vmatrix},$$

где $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Вычисление этого определителя $(n-1)$-го порядка сводится к вычислению аналогичного определителя $(n-2)$-го порядка. Действительно, обозначив их через Δ_{n-1} и Δ_{n-2}, получаем

$$\Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} + \begin{vmatrix} 1+f_1^2 & f_1 f_2 & \ldots & f_1 f_{n-1} \\ f_2 f_1 & 1+f_2^2 & \ldots & f_2 f_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1} f_1 & f_{n-1} f_2 & \ldots & f_{n-1}^2 \end{vmatrix},$$

В последнем определителе из последней строки вынесем множитель f_{n-1}, и такой же множитель вынесем из последнего столбца. В результате останется определитель, равный 1. Поэтому справедлива рекуррентная формула $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} + f_{n-1}^2$, из которой следует, что $\Delta_{n-1} = 1 + f_1^2 + \cdots + f_{n-1}^2$.

Таким образом, для поверхности S, которая является графиком непрерывно дифференцируемой функции (7), справедлива формула

$$\mu S = \int\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \right)^2} \, d\widetilde{x}, \tag{8}$$

которую можно записать еще и так:

$$\mu S = \int\limits_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dv,$$

где ∇f — градиент функции f, а dv — элемент $(n-1)$-мерного объема.

Пример 1. Вычислим площадь поверхности сферы $S_n(R)$:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2.$$

Очевидно, поверхность $S_n(R)$ есть сумма поверхностей $S_n^+(R)$ и $S_n^-(R)$, которые являются графиками функций

$$x_n = \pm\sqrt{R^2 - |\widetilde{x}|^2},$$

где $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Тогда из формулы (8) следует, что

$$\mu S_n(R) = 2R \int\limits_{K_{n-1}(R)} \frac{d\widetilde{x}}{\sqrt{R^2 - |\widetilde{x}|^2}}, \tag{9}$$

где $K_{n-1}(R)$ — $(n-1)$-мерный круг радиуса R.

Сделав замену

$$x_1 = R\xi_1, \ldots, x_{n-1} = R\xi_{n-1},$$

получим

$$\mu S_n(R) = 2R^{n-1} \int\limits_{K_{n-1}(1)} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} = R^{n-1} \mu S_n(1),$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Положим $\widetilde{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-2})$. Тогда

$$\mu S_n(1) = 2 \int\limits_{K_{n-2}(1)} d\widetilde{\xi} \int\limits_{-\sqrt{1-|\widetilde{\xi}|^2}}^{\sqrt{1-|\widetilde{\xi}|^2}} \frac{d\xi_{n-1}}{\sqrt{1 - |\widetilde{\xi}|^2 - \xi_{n-1}^2}} =$$

$$= 2 \int\limits_{K_{n-2}(1)} d\widetilde{\xi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\pi \int\limits_{K_{n-2}(1)} d\widetilde{\xi} = 2\pi \cdot mK_{n-2}(1),$$

где $mK_{n-2}(1)$ — объем единичного $(n-2)$-мерного шара. Отсюда и из формулы для объема n-мерного шара следует, что

$$\mu S_{2k}(1) = 2\pi \cdot \frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!},$$

$$\mu S_{2k+1}(1) = 2\pi \cdot \frac{2(2\pi)^{k-1}}{(2k-1)!!} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k-1)!!}.$$

В частности,

$$\mu S_2(1) = 2\pi, \quad \mu S_3(1) = 4\pi, \quad \mu S_4(1) = 2\pi^2,$$

$$\mu S_5(1) = \frac{8}{3}\pi^2, \quad \mu S_6(1) = \pi^3.$$

5.5. Интеграл от функции по k-мерной поверхности. Пусть S — непрерывно дифференцируемая k-мерная поверхность в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданная отображением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in D, \tag{1}$$

где D — измеримая область в пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \leqslant n$. Предположим, что S имеет конечную площадь, и на S задана функция f.

Как и выше (см. п.5.2), для любого разбиения $\tau = \{D_1, \ldots, D_N\}$ области D множество поверхностей $S_i = \{\mathbf{r}(t),\ t \in D_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, называется *разбиением поверхности* S и обозначается $\tau(S)$, а суммы

$$s(f;\tau) = \sum_{i=1}^{N} m_i \mu S_i, \quad S(f;\tau) = \sum_{i=1}^{N} M_i \mu S_i,$$

где m_i и M_i — точные грани (соотв., нижняя и верхняя) функции f на S_i, называются *интегральными суммами Дарбу функции* f.

Очевидно, $s(f;\tau) \leqslant S(f;\tau) \quad \forall \tau(S)$.

Определение 1. Если

$$\sup_{\tau} s(f;\tau) = \inf_{\tau} S(f;\tau), \tag{2}$$

то функция f называется *интегрируемой*, а число (2) — *интегралом от функции f по поверхности S* и обозначается $\displaystyle\int_S f\,dS$.

Этот интеграл называют еще *поверхностным интегралом 1-го рода.*

Как и в п.5.2 доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть поверхность S, заданная отображением (1), непрерывно дифференцируема и имеет конечную площадь. Тогда, если функция f непрерывна и ограничена на поверхности S, то она интегрируема на S и справедлива формула*

$$\int_S f\,dS = \int_D f(\mathbf{r}(t))\sqrt{\det \|(\mathbf{r}'_i, \mathbf{r}'_j)\|}\,dt, \tag{3}$$

где $\|(\mathbf{r}'_i, \mathbf{r}'_j)\|$ — матрица Грама векторов

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_1}, \ldots, \mathbf{r}'_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_k}.$$

Формулу (3) иногда принимают за определение поверхностного интеграла 1-го рода. Отметим, что кратный интеграл в этой формуле может быть как собственным, так и несобственным.

Если S есть объединение непрерывно дифференцируемых параметрически заданных поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_N$, то, по определению,

$$\int_S f\,dS = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} f\,dS.$$

Глава 12

ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Криволинейные интегралы и формула Грина

1.1. Криволинейные интегралы: определения, основные свойства и некоторые обобщения. В этом параграфе мы получим одну из классических формул математического анализа — *формулу Грина*, которая связывает двойной и криволинейный интегралы и в некотором смысле является аналогом формулы Ньютона–Лейбница. Сначала кратко напомним определения и основные свойства криволинейных интегралов (см. § 6 главы 7).

Пусть задана спрямляемая кривая $\gamma = \overset{\smile}{AB}$, и пусть s — переменная длина дуги этой кривой, отсчитываемая от точки A. Через M_s обозначим точку кривой γ, для которой $|\overset{\smile}{AM_s}| = s$. Тогда для любой функции $f(M)$, $M \in \gamma$, интеграл

$$\int_0^S f(M_s)\,ds, \quad S = |\overset{\smile}{AB}|,$$

называется интегралом от функции f по кривой γ (или криволинейным интегралом 1-го рода) и обозначается $\int\limits_\gamma f\,ds$ или $\int f\,d\gamma$.

Таким образом, по определению,

$$\int f\,d\gamma = \int_0^S f(M_s)\,ds,$$

где S — длина кривой γ.

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от ориентации кривой, т.е. интеграл от f по $\overset{\smile}{AB}$ равен интегралу от f по $\overset{\smile}{BA}$. Если кривая $\gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ гладкая, то

$$\int f\,d\gamma = \int_a^b f(M_t)|\mathbf{r}'(t)|\,dt, \tag{1}$$

где M_t — точка кривой γ с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$. Эта формула понимается в том смысле, что если один из интегралов существует, то существует и второй, и они равны.

Пусть теперь спрямляемая кривая $\gamma = \breve{AB}$ в каждой точке $M \in \in \gamma$ имеет единичный касательный вектор $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}(M)$, направленный в сторону возрастания переменной дуги s (см. § 6 главы 7). Через l_i обозначим i-ю координату вектора $\boldsymbol{l}$. Тогда для любой функции $f(M)$, $M \in \gamma$, интеграл $\int\limits_\gamma f l_i \, d\gamma$ называется криволинейным интегралом 2-го рода по кривой γ от функции f по dx_i и обозначается $\int\limits_\gamma f\, dx_i$, где x_i — i-я координата точки M. Отметим, что криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак при изменении ориентации кривой.

Известно, что если кривая $\gamma = \{\mathbf{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ гладкая, то

$$\int\limits_\gamma f\, dx_i = \int\limits_a^b f(\mathbf{r}(t)) x_i'(t)\, dt, \tag{2}$$

где кривая γ ориентирована параметром t. Это равенство понимается в том смысле, что если существует один из интегралов, то существует и другой, и они равны.

По определению, интеграл по кусочно-гладкой кривой равен сумме интегралов от рассматриваемой функции по всем гладким кускам этой кривой.

В этом параграфе в основном будем рассматривать криволинейные интегралы на плоскости. Особый интерес представляет случай явного задания кривой γ, по которой происходит интегрирование.

Из формул (1) и (2) следует, что если кривая γ имеет явное представление $y = \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int\limits_\gamma f(x,y)\, ds = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx, \tag{3}$$

$$\int\limits_\gamma f(x,y)\, dx = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\, dx, \tag{4}$$

$$\int\limits_\gamma f(x,y)\, dy = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x)) \varphi'(x)\, dx, \tag{5}$$

где γ ориентирована переменной x: от точки $x = a$ до точки $x = b$.

Заметим, что при вычислении интеграла (4) не требуется никакой дополнительной гладкости от функции φ, кроме непрерывности. Этот факт наводит на мысль о возможности обобщения понятия криволинейного интеграла 2-го рода. Для этого используют специальные интегральные суммы (для сравнения см. конец п. 6.2 § 6 гл. 7).

Пусть плоская кривая γ имеет представление $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и пусть на γ задана функция f. Через τ обозначим некоторое разбиение отрезка $[a; b]$ точками

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_N = b$$

и рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{j=1}^{N} f(x(\xi_j), y(\xi_j))\Delta x_j, \tag{6}$$

где $t_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant t_j$, $\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1})$. Тогда, если существует предел этой суммы при $|\tau| \to 0$, т.е. по любой последовательности $\{\tau_n\}$, у которой $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$, и этот предел не зависит от выбора точек ξ_j, то он называется криволинейным интегралом $\int\limits_{\gamma} f\,dx$.

Отметим, что этот интеграл заведомо существует, если функция f на кривой γ непрерывна, а функция $x = x(t)$ на интервале $(a; b)$ имеет интегрируемую производную.

Аналогично определяется и интеграл $\int\limits_{\gamma} f\,dy$.

Легко видеть, что если кривая γ гладкая, то новое определение равносильно данному ранее определению криволинейных интегралов 2-го рода по кривой γ. Однако, согласно новому определению, в случае явного задания $y = \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, кривой γ интеграл $\int\limits_{\gamma} f(x, y)\,dx$ существует и в тех случаях, когда функция φ не является дифференцируемой на $[a; b]$. А именно, этот интеграл существует тогда, когда сложная функция $f(x, \varphi(x))$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, причем в этом случае справедлива формула (4).

В качестве упражнения предлагается доказать, что так определенные криволинейные интегралы не зависят от выбора представления ориентированной кривой.

Замечание 1. Из интегральной суммы (6) видно, что если координата x на кривой γ не меняется, то $\int\limits_\gamma f\,dx = 0$ для любой функции f, определенной на γ. Аналогично, если не меняется y на γ, то $\int\limits_\gamma f\,dy = 0$. Если же кривая γ такая, что $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ для любого $t \in [a; b]$, т.е. γ – это точка с координатами x_0, y_0, то

$$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$$

для любых функций P и Q, определенных на γ.

Замечание 2. Пусть непрерывно дифференцируемое отображение, задаваемое формулами

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

отображает область Ω на область G. Пусть, далее, γ – непрерывно дифференцируемая кривая:

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

лежащая в области Ω, а Γ — ее образ в области G. Тогда для любых непрерывных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, $(x, y) \in G$, имеем:

$$\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b (Px'_t(t) + Qy'_t(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y)(x'_\xi \xi'_t(t) + x'_\eta \eta'_t(t))\,dt + \int\limits_a^b Q(x,y)(y'_\xi \xi'_t(t) + y'_\eta \eta'_t(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b (Px'_\xi + Qy'_\xi)\xi'_t(t)\,dt + \int\limits_a^b (Px'_\eta + Qy'_\eta)\eta'_t(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_\gamma (Px'_\xi + Qy'_\xi)\,d\xi + (Px'_\eta + Qy'_\eta)\,d\eta.$$

Следовательно,

$$\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int\limits_\gamma (Px'_\xi + Qy'_\xi)\,d\xi + (Px'_\eta + Qy'_\eta)\,d\eta,$$

где кривая γ и ее образ Γ ориентированы параметром t. Эту формулу иногда называют *формулой замены переменных в криволинейном линей-*

ном интеграле. Она формально почти очевидна: нужно заменить кривую Г кривой γ, а дифференциалы dx и dy полными дифференциалами по ξ и η:

$$dx = x'_\xi\, d\xi + x'_\eta\, d\eta, \quad dy = y'_\xi\, d\xi + y'_\eta\, d\eta.$$

1.2. Формула Грина для клетки. Согласованные ориентации области и ее границы. Сначала сформулируем и докажем одно простое утверждение, которое сделает естественным дальнейшие определения и обобщения.

Пусть в плоскости $\mathbb{R}^2$ фиксирована некоторая прямоугольная система координат x, y, и пусть Δ — некоторая открытая клетка, т.е. $\Delta = (a; b) \times (c; d)$, а $\overline{\Delta}$ — ее замыкание, т.е. $\overline{\Delta} = [a; b] \times [c; d]$. Через $\partial\Delta$, как обычно, обозначим границу множества Δ.

Лемма. *Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны на $\overline{\Delta}$, а их производные P'_y и Q'_x непрерывны и интегрируемы на Δ, то справедлива формула*

$$\iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\partial\Delta} P\, dx + Q\, dy, \tag{1}$$

где обход $\partial\Delta$ совершается против часовой стрелки, если система координат x, y правая (рис. 12.1)*, и по часовой стрелке, если система координат x, y левая* (рис. 12.2).

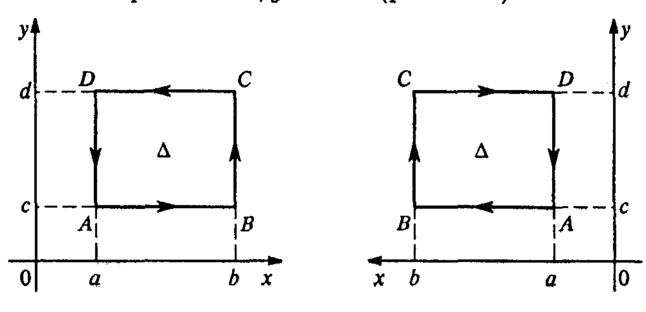


Рис. 12.1 Рис. 12.2

Доказательство. По формуле сведения кратного интеграла к повторному получаем:

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = \int\limits_c^d Q(b, y)\, dy - \int\limits_c^d Q(a, y)\, dy.$$

В правой части стоит разность двух интегралов: первый интеграл — это криволинейный интеграл по отрезку BC, а второй —

это интеграл по отрезку AD. Следовательно,

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{BC} Q\,dy - \int\limits_{AD} Q\,dy = \int\limits_{BC} Q\,dy + \int\limits_{DA} Q\,dy.$$

А так как интегралы от $Q\,dy$ по AB и CD равны нулю, то

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{ABCDA} Q\,dy.$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{ABCDA} P\,dx.$$

Лемма доказана.

Формула (1) называется *формулой Грина*. Таким образом, *формула Грина справедлива для любого прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат.*

Отметим, что в формуле Грина (1) ориентация контура $\partial\Delta$ существенно зависит от того, какая система координат выбрана: правая или левая. В соответствии с этим говорят, что плоскость (и любая область на этой плоскости) имеет *две ориентации*: одна задается правой системой координат, а другая — левой системой координат.

В формуле Грина (1) во всех случаях ориентация контура $\partial\Delta$ выбирается следующим образом: если $\boldsymbol{l}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы касательной и внешней нормали к контуру $\partial\Delta$, то пара векторов $\{\mathbf{n}, \boldsymbol{l}\}$ в любой точке кривой $\partial\Delta$, где они существуют, ориентирована так же, как и базис выбранной системы координат. В этом случае говорят, что *ориентация границы $\partial\Delta$ согласована с ориентацией области Δ.*

Формула Грина справедлива для широкого класса областей. Во всех случаях в этой формуле ориентация границы согласована с ориентацией области в вышеуказанном смысле. Дадим точное определение этому понятию.

Пусть гладкая ориентированная кривая Γ является границей или частью границы области G, причем область G лежит по одну сторону от кривой Γ. Это означает, что у любой точки $M_0 \in \Gamma$ существует окрестность $O(M_0)$ такая, что если $[M_1M_2]$ — отрезок нормали к кривой Γ в точке M_0 такой, что

$$M_1 \neq M_0, \quad M_2 \neq M_0, \quad M_0 \in [M_1M_2] \subset O(M_0),$$

то один из отрезков $[M_0M_1]$ или $M_0M_2]$ принадлежит замкнутой области $\overline{G}$, а другой — множеству $\mathbb{R}^2 \backslash G$. Тогда, если, например, $[M_0M_1] \subset \overline{G}$, то луч $[M_0M_1)$ называется *внутренней нормалью к кривой Γ*, а луч $[M_0M_2)$ — *внешней нормалью к кривой Γ в точке M_0 относительно области G.*

В каждой точке $M \in \Gamma$ через $\mathbf{l}$ обозначим единичный вектор касательной, направление которого соответствует ориентации кривой Γ, а через $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к кривой Γ в точке M относительно области G.

Определение 1. Пусть на плоскости $\mathbf{R}^2$, в которой выбрана некоторая правая (или левая) прямоугольная система координат, задана область G, и пусть ∂G — ее граница. Говорят, что *ориентация гладкой кривой* $\Gamma \subset \partial G$ *согласована с ориентацией области* G, если в каждой точке $M \in \Gamma$ упорядоченная пара векторов $\{\mathbf{n}, \mathbf{l}\}$ образует правую (левую) систему координат. В этом случае будем говорить, что *кривая* $\Gamma \subset \partial G$ *ориентирована относительно области* G *положительно*, а в противном случае – *отрицательно*.

Определение 2. Пусть на плоскости $\mathbf{R}^2$, в которой выбрана некоторая прямоугольная система координат, задана область G с кусочно-гладкой границей ∂G. Тогда, если любая гладкая часть границы области G ориентирована положительно относительно области G, то говорят, что *граница* ∂G *области* G *ориентирована положительно* (относительно области G).

В дальнейшем для простоты всюду будем рассматривать только правые системы координат. В этом случае положительная ориентация границы ∂G области G означает, что при движении по ∂G в направлении согласно ориентации область G остается слева. Отметим, что последнее правило имеет смысл для любой области с непрерывной ориентированной границей.

Рассмотрим несколько примеров.

На рис. 12.3 изображен круг с положительно ориентированной границей Γ. Отметим, что в этом случае окружность Γ обходится против часовой стрелки.

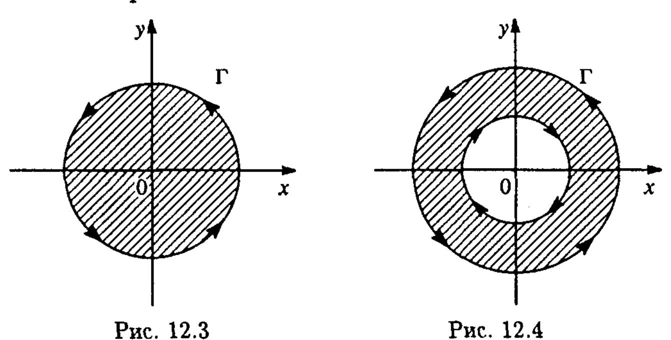


Рис. 12.3 Рис. 12.4

На рис. 12.4 изображено круговое кольцо с положительно ориентированной границей. В этом случае граница состоит из двух окружностей γ и Γ. Внешняя окружность Γ обходится против часовой стрелки, а внутренняя окружность γ — по часовой стрелке.

1.3. Формула Грина для областей, элементарных относительно обеих осей координат. В предыдущем пункте мы доказали формулу Грина для прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Почти так же она доказывается и для областей, которые элементарны относительно обеих осей координат.

Определение. Область $G \subset \mathbf{R}^2$ называется *элементарной относительно оси* y, если

$$G = \{(x; y) : x \in (a; b), \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}, \tag{1}$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a; b]$ (рис. 12.5).

Аналогично, если

$$G = \{(x; y) : y \in (c; d), \quad \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}, \tag{2}$$

где функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ определены и непрерывны на отрезке $[c; d]$, то область G называется *элементарной относительно оси* x (рис. 12.6).

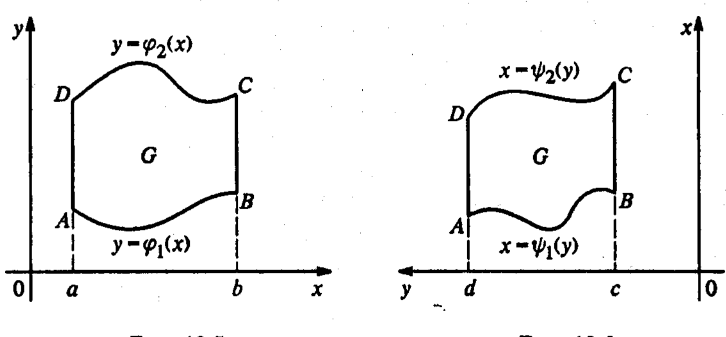


Рис. 12.5 Рис. 12.6

Теорема 1. *Пусть область G элементарна относительно обеих осей координат. Тогда, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны на замкнутой области $\overline{G}$, а их производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны и интегрируемы на G, то*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial G} P\, dx + Q\, dy, \tag{3}$$

где ∂G — положительно ориентированная граница области G.

Доказательство. Так как область G элементарна относительно оси y, т.е. задается равенством (1), то

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx = \int\limits_{\gamma_2} P\,dx - \int\limits_{\gamma_1} P\,dx, \qquad (4)$$

где кривые γ_1 и γ_2 — это графики функций φ_1 и φ_2, ориентированные переменной x.

Легко видеть, (см. рис. 12.5), что кривая γ_1 ориентирована положительно относительно области G, а кривая γ_2 — отрицательно. Пусть $\gamma_1 = \breve{AB}$, $\gamma_2 = \breve{DC}$. Кроме этих кривых, граница области G может содержать еще два отрезка AD и BC, параллельные оси y, по которым интеграл от $P\,dx$ равен нулю. После этих замечаний из равенства (4) получаем:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_{\breve{DC}} P\,dx - \int\limits_{\breve{AB}} P\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx - \int\limits_{\overline{BC}} P\,dx - \int\limits_{\breve{CD}} P\,dx - \int\limits_{\overline{DA}} P\,dx = -\int\limits_{\partial G} P\,dx.$$

Аналогично, так как область G элементарна относительно оси x, то (см. рис. 12.6)

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx =$$

$$= \int\limits_c^d Q(\psi_2(y),y)\,dy - \int\limits_c^d Q(\psi_1(y),y)\,dy = \int\limits_{\breve{CD}} Q\,dy - \int\limits_{\breve{BA}} Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{\breve{AB}} Q\,dy + \int\limits_{\overline{BC}} Q\,dy + \int\limits_{\breve{CD}} Q\,dy + \int\limits_{\overline{DA}} Q\,dy = \int\limits_{\partial G} Q\,dy.$$

Таким образом, если область G элементарна относительно обеих осей координат, то справедливы равенства

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial G} P\,dx, \qquad \iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial G} Q\,dy,$$

из которых и следует формула Грина (3). Теорема 1 доказана.

Для краткости положим

$$\omega = P\,dx + Q\,dy, \tag{5}$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{6}$$

В этих обозначениях формула Грина для области G принимает вид:

$$\iint\limits_G d\omega = \int\limits_{\partial G} \omega,$$

где ∂G — положительно ориентированная граница области G.

Выражение (5) называется *дифференциальной формой 1-го порядка от двух переменных*, а выражение (6) — *дифференциалом формы* ω. Он вычисляется следующим образом:

$$d\omega = dP\,dx + dQ\,dy =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right) dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\right) dy,$$

причем считают, что $dx\,dx = dy\,dy = 0$ и $dy\,dx = -dx\,dy$.

Примерами областей, которые элементарны относительно обеих осей координат, являются круг, внутренность эллипса, треугольник и, вообще, произвольный выпуклый многоугольник. Легко видеть, что таким свойством обладают многие ограниченные выпуклые области.

Теорема 2. *Если область G гладкими кривыми без точек самопересечения можно разрезать на конечное число областей, для которых справедлива формула Грина, то для области G тоже справедлива формула Грина.*

Доказательство. Пусть простая гладкая кривая $\smile{AB}$ область G разрезает на две области G_1 и G_2. Это означает, что концы этой кривой лежат на ∂G, а все другие ее точки принадлежат G. Поэтому $\overset{\smile}{AB} = \partial G_1 \cap \partial G_2$, причем, если, например, кривая $\overset{\smile}{AB}$ ориентирована положительно относительно области G_1, то относительно области G_2 она ориентирована отрицательно (рис. 12.7).

Тогда, если для областей G_1 и G_2 справедлива формула Грина, то

$$\iint\limits_{G} d\omega = \iint\limits_{G_1} d\omega + \iint\limits_{G_2} d\omega = \int\limits_{\partial G_1} \omega + \int\limits_{\partial G_2} \omega = \int\limits_{\partial G} \omega,$$

так как интегралы по $\breve{AB}$ и $\breve{BA}$ взаимно уничтожаются. Для большего числа разрезов рассуждения аналогичны. Теорема 2 доказана.

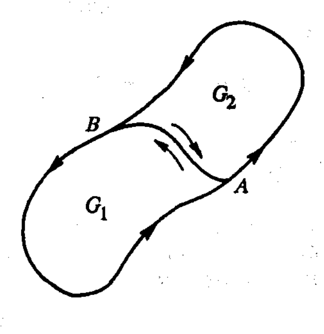


Рис. 12.7

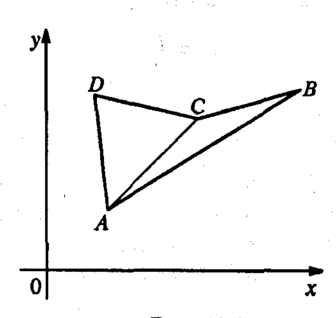


Рис. 12.8

Пример 1. Четырехугольник $ABCD$, изображенный на рис. 12.8, является элементарным только относительно оси y, однако отрезком AC он разбивается на два треугольника ABC и ACD, которые элементарны относительно обеих осей координат. Следовательно, для четырехугольника $ABCD$ формула Грина справедлива.

Пример 2. Круговое кольцо G (см. рис. 12.4) не является элементарной областью ни относительно оси x, ни относительно оси y, однако осями координат оно разбивается на четыре области, каждая из которых элементарна относительно обеих осей координат. Следовательно, в этом случае тоже справедлива формула Грина:

$$\iint\limits_{G} d\omega = \int\limits_{\partial G} \omega,$$

где ∂G состоит из двух окружностей Γ и γ, причем обе они ориентированы положительно относительно области G. Так что, если через Γ^+ и γ^+ обозначить окружности Γ и γ, ориентированные против часовой стрелки, то

$$\iint\limits_{G} d\omega = \int\limits_{\Gamma+} \omega - \int\limits_{\gamma^+} \omega. \tag{7}$$

Иногда направление обхода контура обозначают на самом криволинейном интеграле при помощи окружности со стрелкой и тогда формулу (7) записывают в следующем виде:

$$\iint\limits_G d\omega = \oint\limits_\Gamma \omega - \oint\limits_\gamma \omega.$$

1.4. Формула Грина для простых областей. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется *простой областью*, если она элементарна относительно одной из осей координат, причем, если, например,

$$G = \{(x, y) : x \in (a; b), \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}, \tag{1}$$

то функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и непрерывно дифференцируемы на интервале $(a; b)$.

Теорема. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны на замыкании простой области G. Тогда, если они непрерывно дифференцируемы и их производные ограничены на G, то справедлива формула Грина*

$$\iint\limits_G d\omega = \int\limits_{\partial G} \omega. \tag{2}$$

Напомним, что здесь $\omega = P\,dx + G\,dy$, а ∂G ориентирована положительно относительно области G.

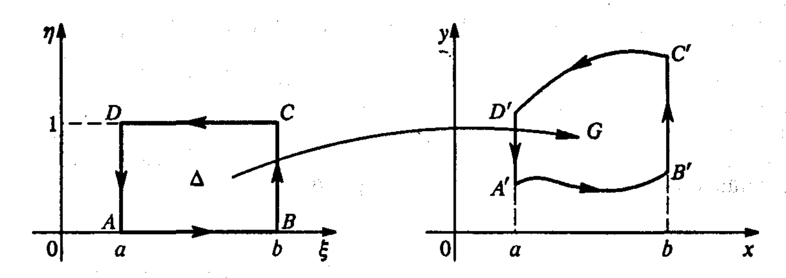


Рис. 12.9

Доказательство. Пусть область G элементарна относительно оси y и задана равенством (1). Тогда она (рис. 12.9) является образом прямоугольника $\Delta = (a; b) \times (0; 1)$ при отображении

$$\begin{cases} x = \xi, \\ y = \varphi_1(\xi) + \eta\,(\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)), \end{cases} \tag{3}$$

у которого

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi).$$

Отображение (3) взаимно однозначно на открытом прямоугольнике Δ, но оно может быть неоднозначным на $\partial\Delta$. Например, отрезок $A'D'$, который является образом отрезка AD, может выродиться в точку.

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\partial G} \omega = \int\limits_{\breve{A'B'}} \omega + \int\limits_{\breve{B'C'}} \omega + \int\limits_{\breve{C'D'}} \omega + \int\limits_{\breve{D'A'}} \omega.$$

Отсюда по формуле замены переменных в криволинейном интеграле получаем:

$$\int\limits_{\partial G} \omega = \int\limits_{\overline{AB}} \omega^* + \int\limits_{\overline{BC}} \omega^* + \int\limits_{\overline{CD}} \omega^* + \int\limits_{\overline{DA}} \omega^* = \int\limits_{\partial\Delta} \omega^*, \tag{4}$$

где

$$\omega^* = \left(Px'_\xi + Qy'_\xi\right)\, d\xi + \left(Px'_\eta + Qy'_\eta\right)\, d\eta.$$

Для прямоугольника Δ формула Грина уже доказана, поэтому

$$\int\limits_{\partial\Delta} \omega^* = \iint\limits_{\Delta} d\omega^*. \tag{5}$$

Легко вычисляется, что

$$d\omega^* = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta.$$

Тогда из формулы замены переменных в кратном интеграле следует, что

$$\iint\limits_{\Delta} d\omega^* = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint\limits_{G} d\omega. \tag{6}$$

Теперь из (4), (5) и (6) получаем:

$$\int\limits_{\partial G} \omega = \int\limits_{\partial\Delta} \omega^* = \iint\limits_{\Delta} d\omega^* = \iint\limits_{G} d\omega.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в области G, непрерывны на ее замыкании, и их производные ограничены на G. Тогда, если область G прямыми, параллельными осям координат, можно разбить на конечное число простых областей, то справедлива формула Грина* (2).

Справедливость этого утверждения следует из доказанной выше теоремы и теоремы 2 предыдущего пункта.

Пример. Область

$$G = \left\{(x,y) : 0 < x < 1, \quad x^\alpha \sin\frac{1}{x} < y < 1\right\} \tag{7}$$

при любом $\alpha > 0$ является элементарной относительно оси y. А так как при любом $\alpha > 0$ функция $y = x^\alpha \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на отрезке $[0;1]$ и непрерывно дифференцируема на интервале $(0;1)$, то область (7) при любом $\alpha > 0$ является простой и, следовательно, для нее справедлива формула Грина.

Отметим, что область (7) не является элементарной относительно оси x. Более того, ее нельзя разбить на конечное число областей, элементарных относительно обеих осей координат.

1.5. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов. Пусть к области $G \subset \mathbf{R}^2$ применима формула Грина:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G} P\,dx + Q\,dy. \tag{1}$$

Тогда площадь области G можно вычислить с помощью криволинейных интегралов по ее границе ∂G. Действительно, полагая $Q = x$ и $P = 0$, получаем:

$$mG = \int\limits_{\partial G} x\,dy. \tag{2}$$

Если же положим $Q = 0$ и $P = -y$, то получим:

$$mG = -\int\limits_{\partial G} y\,dx. \tag{3}$$

Наиболее используемой является формула

$$mG = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G} x\,dy - y\,dx, \tag{4}$$

которая получается из формулы (1) при $Q = x$ и $P = -y$.

Напомним, что в формуле (1) и, следовательно, в формулах (2), (3), (4) система координат правая, и граница ∂G области G ориентирована положительно, т.е. при ее обходе согласно ориентации область G остается слева.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдем площадь области G, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.

Так как площадь инвариантна относительно движения, то можно считать, что эллипс задан уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0; 2\pi]. \tag{5}$$

Заметим, что для рассматриваемой области G формула Грина доказана, и что параметром t эллипс (5) ориентирован положительно относительно области G. Поэтому по формуле (4) получаем:

$$mG = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) = \pi ab.$$

Пример 2. Найдем площадь области G, ограниченной астроидой:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = b\sin^3 t, \quad t \in [0; 2\pi],$$

где $a > 0$ и $b > 0$.

Легко видеть, что параметром t эта астроида ориентирована положительно относительно области G. Кроме того, область G элементарна относительно обеих осей координат. Поэтому

$$mG = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3ab(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)\,dt =$$

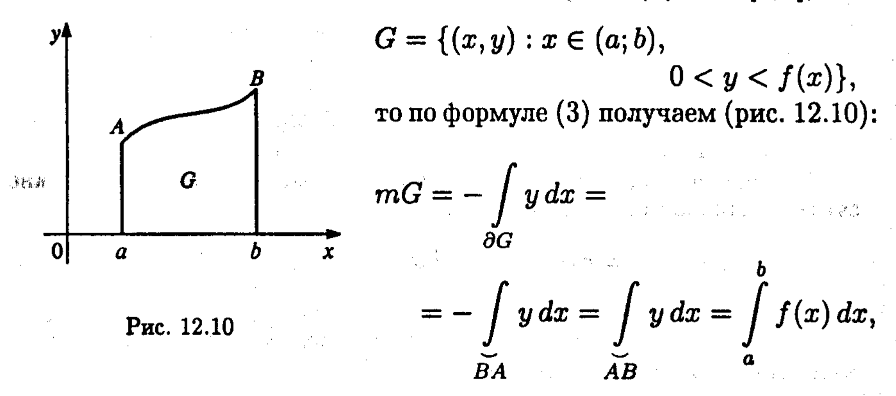
$$= \frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3}{8}\pi ab.$$

Таким образом,

$$mG = \frac{3}{8}\pi ab.$$

В конце заметим, что если G — криволинейная трапеция, соответствующая неотрицательной функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, т.е.



$$G = \{(x, y) : x \in (a; b),\ 0 < y < f(x)\},$$

то по формуле (3) получаем (рис. 12.10):

$$mG = -\int\limits_{\partial G} y\,dx = -\int\limits_{\breve{BA}} y\,dx = \int\limits_{\breve{AB}} y\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

Рис. 12.10

что, вообще говоря, и должно получиться.

1.6. Теорема о продолжении функции с компакта. Прежде всего докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любого конечного интервала* $(a; b)$ *и любого отрезка* $[a'; b'] \subset (a; b)$ *существует бесконечно дифференцируемая функция* $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *которая равна 1 на* $[a'; b']$ *и нулю вне* $(a; b)$. *Кроме того,* $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *для любого* $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Легко показать, что функция $\varphi(x)$, равная $\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ для $x > 0$ и нулю для $x \leqslant 0$, бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ (для этого достаточно показать, что она бесконечно

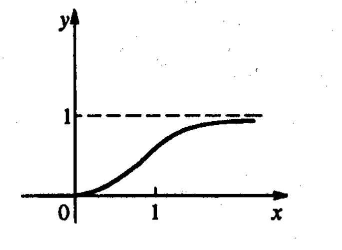


Рис. 12.11

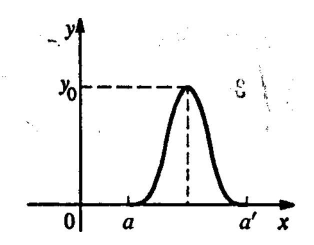


Рис. 12.12

дифференцируема в точке $x = 0$) (рис. 12.11). Отсюда следует, что функция

$$\alpha(x) = \varphi(x - a)\varphi(-x + a')$$

бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, положительна на интервале $(a; a')$ и равна нулю вне этого интервала (рис. 12.12).

Тогда функция

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)\,dt} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} \alpha(t)\,dt$$

равна нулю для $x \leqslant a$ и единице для $x \geqslant a'$.

Кроме того (рис. 12.13), она на $\mathbb{R}$ монотонно возрастает и такая, что $0 \leqslant \alpha_1(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

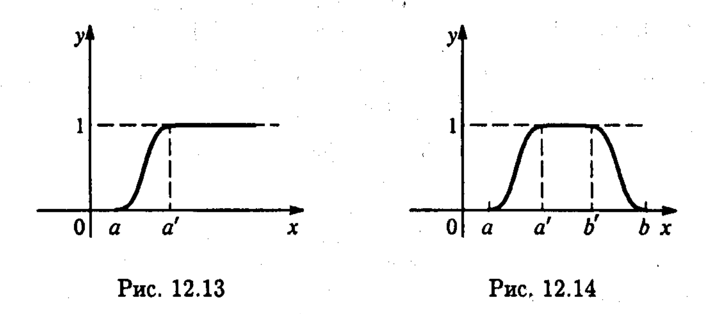


Рис. 12.13 Рис. 12.14

Аналогично, функция

$$\beta(x) = \varphi(x - b')\varphi(-x + b)$$

бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, положительна на интервале $(b'; b)$ и равна нулю вне этого интервала. Тогда функция

$$\beta_1(x) = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \beta(t)\,dt} \int\limits_{x}^{+\infty} \beta(t)\,dt$$

равна единице для $x \leqslant b'$ и нулю для $x \geqslant b$. Кроме того,

$$0 \leqslant \beta_1(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, функция $f(x) = \alpha_1(x)\beta_1(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы (рис. 12.14). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любой открытой клетки $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ и любой замкнутой клетки $\overline{\Delta}' \subset \Delta$ существует бесконечно дифференцируемая функция $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, которая равна 1 на $\overline{\Delta}'$ и нулю вне Δ. Кроме того, она такая, что*

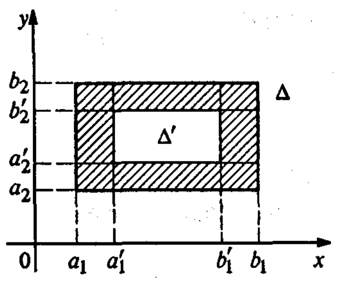


Рис. 12.15

$$0 \leqslant h(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Пусть

$$\Delta = (a_1; b_1) \times \cdots \times (a_n; b_n),$$

$$\overline{\Delta}' = [a_1'; b_1'] \times \cdots \times [a_n'; b_n'].$$

Из леммы 1 следует, что существует бесконечно дифференцируемая функция $f_i(x)$, которая равна 1 для $x \in [a_i'; b_i']$ и нулю вне $(a_i; b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 12.15). Тогда

$$h(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ и любого компакта $K \subset G$ существует бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, которая равна 1 на K и нулю вне G. Кроме того, она такая, что*

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. У каждой точки $M_0 \in K$ существует прямоугольная окрестность $\Pi(M_0) \subset G$. Через $\Pi'(M_0)$ обозначим новую прямоугольную окрестность точки M_0, замыкание которой содержится в $\Pi(M_0)$. Очевидно, открытые прямоугольники $\Pi'(M_0)$, $M_0 \in K$, образуют покрытие компакта K. Из них можно выбрать конечное число множеств $\Pi'(M_1), \ldots, \Pi'(M_N)$, которые тоже образуют покрытие компакта K. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, N$, существует бесконечно дифференцируемая функция $\varphi_j(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, которая равна 1 для $x \in \overline{\Pi}'(M_j)$ и нулю вне $\Pi(M_j)$. Тогда функция

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{j=1}^{N} (1 - \varphi_j(x))$$

удовлетворяет всем условиям леммы. Действительно, если $x \notin G$, то $\varphi_j(x) = 0$ для любого j, и поэтому $\varphi(x) = 0$. Если же $x \in K$, то $\varphi_j(x) = 1$ хотя бы для одного из j, поэтому $\varphi(x) = 1$. Кроме того,

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 3 доказана.

Определение 1. Для данной функции f замыкание множества всех $x \in D_f$ таких, что $f(x) \neq 0$, называется *носителем функции* f и обозначается $\operatorname{supp} f$.

Определение 2. Функция f от n переменных называется *финитной*, если она определена на $\mathbb{R}^n$ и равна нулю вне некоторого ограниченного множества, т.е. ее носитель ограничен.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена и k раз непрерывно дифференцируема на открытом множестве G. Тогда для любого компакта $K \subset G$ существует k раз непрерывно дифференцируемая финитная функция $F(x)$, которая равна $f(x)$ на K и носитель которой содержится в G.*

Доказательство. Пусть $\delta = \rho(K; \partial G)$. Из условий теоремы следует, что $\delta > 0$. Положим $\varepsilon = \delta/2$, и через $O_\varepsilon(K)$ обозначим ε-окрестность множества K.

Согласно лемме 3, существует бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, которая равна 1 на K и нулю вне $O_\varepsilon(K)$. Тогда, продолжив данную функцию $f(x)$ вне G нулем, видим, что функция $F(x) = f(x)\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. В частности, носитель функции $F(x)$ содержится в замыкании ε-окрестности компакта K. Теорема доказана.

1.7. Формула Грина для областей с гладкими и кусочно-гладкими границами. Введенные выше понятия делают естественным рассмотрение следующего общего класса областей, для которых имеет место формула Грина.

Определение. Область G называется *областью с гладкой границей*, если у любой точки $M_0 \in \partial G$ существует прямоугольная окрестность $\Pi(M_0)$ такая, что множество $G \cap \Pi(M_0)$ является простой областью, а часть границы $\partial G \cap \Pi(M_0)$ имеет явное представление: $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$.

Образно область с гладкой границей можно определить как область без углов. Отметим, что граница такой области, вообще говоря, может быть несвязным множеством. На рис. 12.16 изображена область, ограниченная одним гладким контуром Γ, а на рис. 12.17 изображена область, ограниченная двумя гладкими контурами Γ и γ.

Совокупность всевозможных открытых клеток $\Pi(M_0)$, $M_0 \in \in \partial G$, которые введены в предыдущем определении, образуют покрытие множества ∂G. Каждую клетку $\Pi(M_0)$ немного уменьшим вдоль осей координат так, чтобы новая открытая клетка $\Pi'(M_0)$ оставалась окрестностью точки M_0 и лежала строго внутри $\Pi(M_0)$. Очевидно, совокупность всех этих новых открытых клеток тоже является покрытием множества ∂G. А так как ∂G — компакт, то из этого открытого покрытия можно выделить конечное число

клеток, которые покрывают ∂G. Пусть это конечное покрытие множества ∂G состоит из клеток

$$\Pi'(M_1), \ldots, \Pi'(M_n). \tag{1}$$

Рассмотрим далее множество $G_0 = G \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \Pi'(M_j)$. Оно замкнуто и лежит строго внутри области G, поэтому каждая его

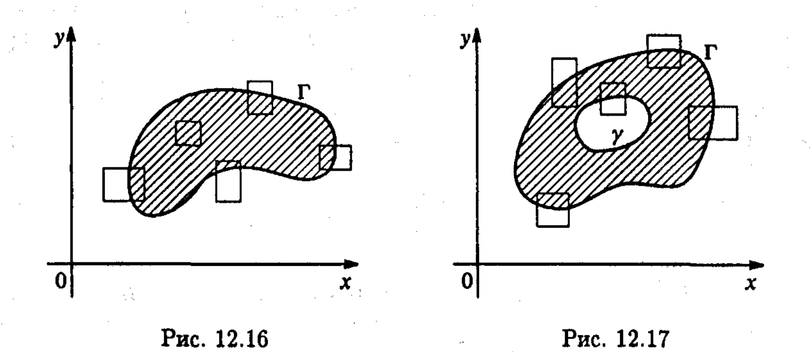


Рис. 12.16 Рис. 12.17

точка M_0 имеет прямоугольную окрестность $\Pi(M_0)$, замыкание которой не пересекается с ∂G. Как и выше, через $\Pi'(M_0)$ обозначим новую открытую клетку, которая является окрестностью точки M_0 и лежит строго внутри $\Pi(M_0)$. Очевидно, совокупность клеток $\Pi'(M_0)$, $M_0 \in G_0$, является покрытием множества G_0. А так как G_0 — компакт, то существует конечное число этих клеток:

$$\Pi'(M_{n+1}), \ldots, \Pi'(M_N), \tag{2}$$

которые покрывают G_0.

Таким образом, совокупность множеств (1) и (2) является покрытием замкнутой области $\overline{G}$, причем это покрытие такое, что для каждой области $G_j = G \cap \Pi(M_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, справедлива формула Грина.

Через $h_j(x, y)$ обозначим бесконечно дифференцируемую функцию, которая равна 1 в $\Pi'(M_j)$ и нулю вне $\Pi(M_j)$, $j = 1, \ldots, N$. Тогда функции

$$\begin{aligned} l_1 &= h_1 \\ l_2 &= h_2(1 - h_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_N &= h_N(1 - h_{N-1}) \ldots (1 - h_1) \end{aligned} \tag{3}$$

определены и бесконечно дифференцируемы на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, причем каждая функция $l_j(x,y)$ равна нулю вне прямоугольника $\Pi(M_j)$, $j = 1, \ldots, N$. Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{N} l_j(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in \overline{G}.$$

Действительно, легко видеть, что

$$1 - \sum_{j=1}^{N} l_j(x,y) = (1-h_1)(1-h_2)\ldots(1-h_N),$$

а последнее произведение равно нулю в любой точке $(x,y) \in \overline{G}$, так как любая точка из $\overline{G}$ принадлежит одному из прямоугольников $\Pi'(M_j)$, где $h_j(x,y) = 1$. Говорят, что функции (3) образуют *разбиение единицы, подчиненное покрытию* (1), (2) замкнутой области $\overline{G}$.

Для построенного разбиения единицы имеем:

$$\iint\limits_G d\omega = \iint\limits_G d\left(\sum_{j=1}^{N} l_j\omega\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_G d(l_j\omega) = \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{G_j} d(l_j\omega) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\partial G_j} l_j\omega.$$

Здесь $l_j \equiv 0$ на ∂G_j, если $j > n$, так как в этом случае $G_j = \Pi(M_j)$. А в случае, когда $j \leqslant n$, функция l_j может быть отличной от нуля только на той части ∂G_j, которая лежит на ∂G, поэтому

$$\iint\limits_G d\omega = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\partial G_j} l_j\omega = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\partial G} l_j\omega = \int\limits_{\partial G} \omega.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны на замыкании ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей. Тогда, если они непрерывно дифференцируемы и их производные ограничены на G, то справедлива формула Грина

$$\iint\limits_G d\omega = \int\limits_{\partial G} \omega, \tag{4}$$

где, как обычно, $\omega = P\,dx + Q\,dy$, а ∂G ориентирована положительно относительно области G.

Последнее условие означает, что каждый контур, входящих в ∂G, ориентирован положительно относительно области G. Например, на рис. 12.17 контур Γ обходится против часовой стрелки, а контур γ — по часовой стрелке.

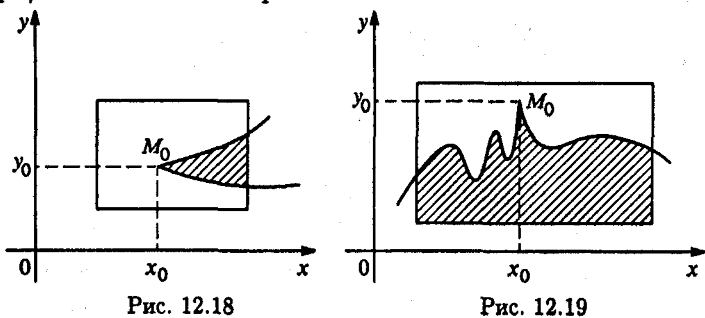


Рис. 12.18 Рис. 12.19

Аналогично доказывается формула Грина и для области G, ограниченной кусочно-гладкими контурами, в случае, когда у каждой угловой точки $M_0 \in \partial G$ существует прямоугольная окрестность $\Pi(M_0)$ такая, что область $G \cap \Pi(M_0)$ является или простой (рис. 12.18), или такой, что прямой, проходящей через точку M_0 параллельно одной из осей координат, она разбивается на две простые области (рис. 12.19). Такие угловые точки будем называть *регулярными*.

В случае нерегулярных угловых точек формула Грина получается предельным переходом.

Пусть, например, граница области G содержит одну нерегулярную угловую точку M_0. Через $\Pi_\delta(M_0)$ обозначим прямоугольную δ-окрестность точки M_0 и рассмотрим область $G_\delta = G \backslash \overline{\Pi}_\delta(M_0)$. Можно показать, что при любом $\delta > 0$ граница области G не имеет нерегулярных угловых точек, и поэтому для нее справедлива формула Грина:

$$\iint\limits_{G_\delta} d\omega = \int\limits_{\partial G_\delta} \omega.$$

Отсюда в пределе при $\delta \to 0$ получаем формулу Грина для области G.

Таким образом, *формула Грина справедлива для любой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей.*

1.8. Геометрический смысл знака якобиана отображения. Пусть Ω — некоторая область, лежащая в координатной плоскости ξ, η, и пусть Φ — непрерывно дифференцируемое отображение области Ω в координатную плоскость x, y. Будем предполагать, что якобиан отображения Φ отличен от нуля в Ω, т.е. либо всюду в Ω положителен, либо всюду отрицателен. Тогда, как известно, множество

$G = \Phi(\Omega)$, т.е. образ области Ω, тоже будет областью. Очевидно, если кривая γ непрерывно дифференцируема, то ее образ при отображении Φ тоже будет непрерывно дифференцируемой кривой. Действительно, если отображение Φ задается формулами

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \tag{1}$$

а кривая γ — формулами

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad t \in [a; b], \tag{2}$$

то ее образ имеет представление

$$x = x(\xi(t), \eta(t)), \quad y = y(\xi(t), \eta(t)), \quad t \in [a; b]. \tag{3}$$

Поэтому если функции (1) и (2) непрерывно дифференцируемы, то функции (3) тоже непрерывно дифференцируемы, причем

$$\begin{cases} \dot{x} = x'_\xi \dot{\xi} + x'_\eta \dot{\eta}, \\ \dot{y} = y'_\xi \dot{\xi} + y'_\eta \dot{\eta}, \end{cases} \tag{4}$$

где точка означает дифференцирование по t.

Лемма. *Если кривая $\gamma \subset \Omega$ гладкая, то ее образом при отображении Φ тоже будет гладкая кривая.*

Доказательство. Напомним, что непрерывно дифференцируемая кривая (2) называется гладкой, если

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 > 0 \quad \forall t \in [a; b]. \tag{5}$$

Докажем, что

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0 \quad \forall t \in [a; b].$$

Для этого заметим, что определитель линейной системы (4) относительно $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ равен якобиану отображения Φ, который по условию отличен от нуля. Следовательно, эта система однозначно решается относительно $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$, и поэтому если $\dot{x} = \dot{y} = 0$ при некотором $t \in [a; b]$, то при этом t $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$, что противоречит условию (5). Лемма доказана.

Через ω обозначим произвольную односвязную область, которая ограничена кусочно-гладким контуром γ и замыкание которой содержится в области Ω.

Теорема. *Если якобиан диффеоморфизма $\Phi : \Omega \to G$ положителен (отрицателен), то положительной ориентации границы области $\omega \subset G$ соответствует положительная (отрицательная) ориентация границы области $g = \Phi(\omega)$.*

Доказательство. Пусть граница области ω задана уравнениями (2) и параметром t ориентирована положительно относительно области ω. Тогда контур Г, заданный уравнением (3), является границей области $g = \Phi(\omega)$. Контур Г ориентирован параметром t. Эта ориентация соответствует ориентации контура γ при отображении Φ. Вообще говоря, она может не совпадать с положительной ориентацией относительно области g. Поэтому

$$mg = \varepsilon \int\limits_{\Gamma} x\,dy,$$

где $\varepsilon = +1$, если контур Г ориентирован положительно, и $\varepsilon = -1$, если он ориентирован отрицательно относительно области g. Отсюда получаем:

$$mg = \varepsilon \int\limits_{\gamma} x\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + x\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta.$$

А так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(x\,\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(x\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}, \tag{6}$$

то, согласно формулы Грина,

$$mg = \varepsilon \iint\limits_{\omega} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta.$$

В этом равенстве левая часть всегда положительна, а якобиан, стоящий под интегралом в правой части, имеет один и тот же знак во всех точках области ω. Поэтому

$$\varepsilon\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} > 0 \quad \forall\,(\xi,\eta) \in \omega.$$

Следовательно, контур Г ориентирован положительно относительно области $g = \Phi(\omega)$ тогда и только тогда, когда якобиан отображения Φ больше нуля. Если же он меньше нуля, то контур Г ориентирован отрицательно относительно области g. Теорема доказана.

Заметим, что для упрощения доказательства мы при выводе равенства (6) предположили, что функция $y(\xi,\eta)$ имеет непрерывную производную $y''_{\xi\eta}$. Техническими ухищрениями этого предположения можно избежать.

Таким образом, *если якобиан отображения положительный, то ориентация контура при отображении сохраняется, а если отрицательный, то ориентация меняется.* В этом и заключается *геометрический смысл знака якобиана отображения.*

§ 2. Поверхностные интегралы и формула Стокса

2.1. Ориентация и сторона параметрически заданной гладкой поверхности. Как известно, на плоскости $\mathbb{R}^2$ возможны два класса систем координат: к одному из них относятся так называемые правые системы, а к другому — левые. В связи с этим говорят, что *плоскость* $\mathbb{R}^2$ *имеет две ориентации*: одна задается любой правой системой координат, а другая — любой левой системой координат. Плоскость с фиксированной ориентацией называется *ориентированной плоскостью.* Аналогичным образом вводятся понятие ориентации поверхности и, соответственно, понятие ориентированной поверхности. Чтобы перейти к их описанию, напомним некоторые сведения из линейной алгебры.

Переход от одной системы координат к другой осуществляется с помощью квадратной матрицы, возникающей при разложении одного базиса по другому. Определитель этой матрицы всегда отличен от нуля. Следовательно, на плоскости множество всех систем координат разбивается на два класса эквивалентности следующим образом: две системы координат относятся к одному классу, если определитель матрицы перехода положителен, в противном случае они относятся к разным классам. Аналогичные классы эквивалентности можно рассмотреть и для любой гладкой параметрически заданной поверхности

$$S = \{\mathbf{r}(u,v), \quad (u,v) \in D\}. \tag{1}$$

На гладкой поверхности (1) параметры u, v являются координатами ее точек, а допустимые преобразования параметров — преобразованиями координат на ней. Следовательно, на гладкой поверхности (1) любая система координат получается из (u,v) с помощью диффеоморфизма с отличным от нуля якобианом, и поэтому множество всех возможных систем координат на этой поверхности разбивается *на два класса эквивалентности*, которые на ней задают *две возможные ориентации.* Одна из этих ориентаций задается координатами (u,v), а другая, например, координатами $\xi = v$, $\eta = u$.

Гладкая поверхность с фиксированной ориентацией называется *ориентированной поверхностью.* Для ориентированной поверхности допустимыми преобразованиями параметров являются диффеоморфизмы с положительным якобианом.

Применяется еще и другой способ задания ориентации поверхности, лежащей в ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. в пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором фиксирована некоторая, правая или левая, система координат. В дальнейшем, как правило, будем рассматривать только правые системы координат. Любые исключения всегда будем особо оговаривать.

В любой точке гладкой поверхности S, заданной равенством (1), определен единичный вектор нормали по формуле

$$\mathbf{N} = \frac{[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]}{|[\mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v]|}, \quad (u, v) \in D, \tag{2}$$

где $[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]$ — векторное произведение векторов $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$. Напомним, что направление вектора (2) существенно зависит от ориентации пространства $\mathbb{R}^3$, в котором лежит поверхность S.

Очевидно, векторная функция $\mathbf{n} = \mathbf{N}(u, v)$, где вектор $\mathbf{N}(u, v)$ определен по формуле (2), является непрерывной на S. Следовательно, на любой гладкой поверхности существуют два (и только два) непрерывных векторных поля из единичных нормалей: $\mathbf{n} = \mathbf{N}(u, v)$ и $\mathbf{n} = -\mathbf{N}(u, v)$. Они на поверхности S определяют *две стороны* S^+ и S^-.

Определение 1. Пусть на поверхности S существует непрерывное векторное поле из единичных нормалей $\mathbf{n}$. Тогда пара $\{S; \mathbf{n}\}$ называется *стороной поверхности* S, *определяемой нормалью* $\mathbf{n}$.

Выше доказано, что *любая гладкая параметрически заданная поверхность имеет две стороны.*

Определение 2. Пусть гладкая поверхность (1) ориентирована параметрами u, v, и пусть на этой поверхности выбрана сторона, определяемая нормалью $\mathbf{n}$. Тогда, если тройка векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$ правая (левая, если в $\mathbb{R}^3$ выбрана левая система координат), то говорят, что *ориентация поверхности и сторона поверхности согласованы* (рис. 12.20).

Таким образом, *ориентация поверхности* (1) *параметрами* u, v *и сторона этой поверхности, определяемая нормалью* (2), *всегда согласованы.*

Пусть поверхность S имеет явное задание:

$$z = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{3}$$

т.е. S задается векторной функцией

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \varphi(x, y)\mathbf{k}.$$

Тогда нормаль

$$[\mathbf{r}'_x, \mathbf{r}'_y] = -\varphi'_x\mathbf{i} - \varphi'_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

определяет верхнюю сторону поверхности S, и эта сторона согласована с ее ориентацией координатами x, y. В этом случае говорят, что верхняя сторона поверхности S, заданной уравнением (3), ориентирована координатами x, y, а нижняя — координатами y, x.

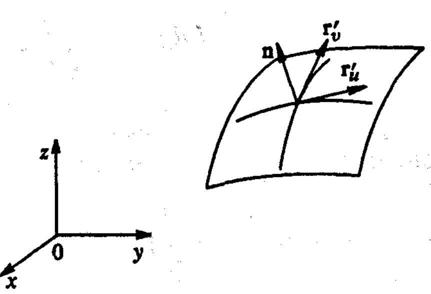


Рис. 12.20

Аналогично, если поверхность S задана уравнением $x = \varphi(y, z)$, то ее верхняя сторона относительно оси x ориентирована координатами y, z. Если же S задана уравнением $y = \varphi(z, x)$, то ее верхняя сторона относительно оси y ориентирована координатами z, x, а нижняя — координатами x, z.

Замечание. Выше сторона поверхности S определялась только в том случае, когда у S в каждой точке существует нормаль. Однако и во многих других случаях можно говорить о стороне поверхности. Например, у любой поверхности S, заданной уравнением (3), имеются две стороны — верхняя и нижняя, хотя нормаль существует только тогда, когда функция $\varphi(x, y)$ дифференцируема.

2.2. Поверхностные интегралы по гладким параметрически заданным поверхностям. Ранее уже рассматривались интегралы от функций по поверхностям (см. § 5 гл.11). Эти интегралы называются *поверхностными интегралами 1-го рода.* Их свойства почти дословно повторяют соответствующие свойства кратных интегралов. Отметим, что поверхностные интегралы 1-го рода не зависят от ориентации поверхности. Здесь рассмотрим другой класс поверхностных интегралов, значения которых существенно зависят от ориентации поверхности, по которой ведется интегрирование.

Определение 1. Пусть S^+ — сторона гладкой поверхности

$$S = \{\mathbf{r}(u, v),\ (u, v) \in D\}, \tag{1}$$

определяемая нормалью $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, и пусть на S задана функция f. Тогда интегралы

$$\iint\limits_S f\cos\alpha\, dS, \qquad \iint\limits_S f\cos\beta\, dS, \qquad \iint\limits_S f\cos\gamma\, dS$$

называются *поверхностными интегралами 2-го рода по* S^+ *от функции* f и обозначаются соответственно

$$\iint\limits_{S^+} f\,dy\,dz, \quad \iint\limits_{S^+} f\,dz\,dx, \quad \iint\limits_{S^+} f\,dx\,dy.$$

Если же S^- — другая сторона поверхности S, то, очевидно, она определяется нормалью $-\mathbf{n}$, и поэтому, например,

$$\iint\limits_{S^-} f\,dy\,dz = -\iint\limits_{S^+} f\,dy\,dz.$$

Следовательно, поверхностные интегралы 2-го рода от функции f по разным сторонам поверхности S отличаются только знаком.

Напомним, что любая гладкая параметрически заданная поверхность S ориентируема и имеет две стороны, причем каждая ее сторона согласована с одной из двух ее ориентаций. Поэтому интегралы по некоторой стороне поверхности S иногда называют интегралами по соответственно ориентированной поверхности S.

Теорема 1. *Пусть гладкая поверхность* (1) *имеет площадь. Тогда, если функция* f *непрерывна и ограничена на* S, *то поверхностные интегралы 2-го рода от функции* f *по поверхности* S *существуют и*

$$\iint\limits_{S^+} f\,dy\,dz = \iint\limits_{D} f\,(\mathbf{r}(u,v))\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv, \tag{2}$$

$$\iint\limits_{S^+} f\,dz\,dx = \iint\limits_{D} f\,(\mathbf{r}(u,v))\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du\,dv, \tag{3}$$

$$\iint\limits_{S^+} f\,dx\,dy = \iint\limits_{D} f\,(\mathbf{r}(u,v))\,\frac{\partial(x.y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv, \tag{4}$$

где S^+ *— сторона поверхности* S, *определяемая нормалью*

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v],$$

т.е. поверхность S *ориентирована параметрами* u, v.

Доказательство. Так как

$$[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v] = \mathbf{i}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \mathbf{j}\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \mathbf{k}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

то, например,

$$\cos\alpha = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{1}{|[\mathbf{r}'_u,\mathbf{r}'_v]|},$$

и поэтому

$$\iint\limits_{S^+} f\,dy\,dz = \iint\limits_{S} f\cos\alpha\,dS = \iint\limits_{D} f\,(\mathbf{r}(u,v))\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,z)}\,du\,dv.$$

Здесь в конце мы воспользовались формулой для вычисления поверхностного интеграла 1-го рода.

Формула (2) доказана. Формулы (3) и (4) доказываются аналогично.

С помощью доказанной теоремы получим *формулы замены переменных в поверхностных интегралах.*

Пусть непрерывно дифференцируемое отображение, заданное формулами

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta,\zeta),\\ y = y(\xi,\eta,\zeta),\\ z = z(\xi,\eta,\zeta),\end{cases} \tag{5}$$

взаимно однозначно отображает область Ω на область G. Пусть далее в Ω уравнениями

$$\xi=\xi(u,v),\quad \eta=\eta(u,v),\quad \zeta=\zeta(u,v),\qquad (u,v)\in D,$$

задана гладкая поверхность Σ, ориентированная параметрами u,v. Через S обозначим образ поверхности Σ при отображении (5), и будем считать, что S тоже ориентирована параметрами u,v. При этих условиях получим формулы замены переменных в поверхностных интегралах.

Как уже доказано, для любой функции f, определенной и непрерывной на S, справедливо равенство

$$\iint\limits_{S} f\,dy\,dz = \iint\limits_{D} f\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv, \tag{6}$$

где поверхность S ориентирована параметрами u,v. Легко подсчитывается, что

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)}\cdot\frac{\partial(\eta,\zeta)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)}\cdot\frac{\partial(\zeta,\xi)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}\cdot\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}.$$

Подставим это выражение в (6) и воспользуемся формулой для вычисления поверхностных интегралов по поверхности Σ. В результате получим равенство

$$\iint\limits_{S} f\,dy\,dz = \iint\limits_{\Sigma} f\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)}\,d\eta\partial\zeta + f\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)}\,d\zeta\,d\xi + f\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta.$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_{S} f\,dz\,dx = \iint\limits_{\Sigma} f\frac{\partial(z,x)}{\partial(\eta,\zeta)}\,d\eta\,d\zeta + f\frac{\partial(z,x)}{\partial(\zeta,\xi)}\,d\zeta\,d\xi + f\frac{\partial(z,x)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\iint\limits_{S} f\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} f\frac{\partial(x,y)}{\partial(\eta,\zeta)}\,d\eta\,d\zeta + f\frac{\partial(x,y)}{\partial(\zeta,\xi)}\,d\zeta\,d\xi + f\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

где поверхности Σ и S ориентированы параметрами u, v.

В заключение отметим два частных случая формулы (4).

1. Пусть поверхность S имеет явное задание

$$z = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in D. \tag{7}$$

Тогда нормаль $\mathbf{N} = [\mathbf{r}'_x, \mathbf{r}'_y] = -\varphi'_x\mathbf{i} - \varphi'_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ определяет верхнюю сторону поверхности S. Следовательно, если $\hat{S}$ — верхняя сторона этой поверхности, то

$$\iint\limits_{\hat{S}} f\,dx\,dy = \iint\limits_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy. \tag{8}$$

2. Пусть поверхность S лежит на цилиндре с образующей, параллельной оси z. Тогда, очевидно, $\cos\gamma = 0$, и, следовательно,

$$\iint\limits_{S} f\,dx\,dy = 0. \tag{9}$$

Замечание 1. В равенстве (8) левая часть определена ранее только для гладких поверхностей, а правая имеет смысл для любой непрерывной поверхности, заданной уравнением вида (7). Это замечание делает естественным следующие обобщения поверхностных интегралов для явно заданных поверхностей.

Для любой поверхности S, заданной явно уравнением (7), интеграл

$$\iint\limits_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy$$

называется *интегралом от функции f по верхней стороне поверхности S*. Таким образом, если эта поверхность ориентирована координатами x, y, то, по определению,

$$\iint\limits_{S} f\,dx\,dy = \iint\limits_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy.$$

Аналогично, если поверхность S задана уравнением

$$x = \varphi(y, z), \quad (y, z) \in D,$$

то, по определению,

$$\iint\limits_S f\,dy\,dz = \iint\limits_D f(\varphi(y, z), y, z)\,dy\,dz,$$

где поверхность S ориентирована координатами y, z. Если же S задана уравнением

$$y = \varphi(z, x), \quad (z, x) \in D,$$

то

$$\iint\limits_S f\,dz\,dx = \iint\limits_D f(x, \varphi(z, x), z)\,dz\,dx,$$

где S ориентирована координатами z, x.

Замечание 2. В равенстве (9) левая часть определена ранее только для поверхностей, для которых определена нормаль $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, но в само определение входит только $\cos\gamma$. Поэтому естественно считать, что

$$\iint\limits_S f\,dx\,dy = 0$$

для любой поверхности S, лежащей на цилиндре с образующей, параллельной оси z.

Аналогично,

$$\iint\limits_S f\,dy\,dz = 0 \quad \left(\iint\limits_S f\,dz\,dx = 0\right)$$

для любой поверхности S, лежащей на цилиндре с образующей, параллельной оси x (оси y).

2.3. Согласованные ориентации гладкой поверхности и ее границы. В этом пункте будем рассматривать поверхности, которые задаются непрерывными векторными функциями вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D}, \tag{1}$$

где $\overline{D}$ — замыкание области $D \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 1. Точка поверхности

$$S = \{\mathbf{r}(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D}\} \tag{2}$$

называется ее *внутренней* (*граничной*) *точкой*, если она является образом внутренней (граничной) точки области D. Совокупность всех граничных точек поверхности S называется *границей* (или *краем*) *поверхности* S и обозначается ∂S.

Таким образом,

$$\partial S = \{\mathbf{r}(u,v), (u,v) \in \partial D\}.$$

Определение 2. Функция (1) называется *непрерывно дифференцируемой в замкнутой области* $\overline{D}$, если она непрерывно дифференцируема в области D и ее производные имеют конечные пределы в любой точке $(u_0, v_0) \in \partial D$.

Заметим, что если в точке $(u_0, v_0) \in \partial D$ функция $\mathbf{r}(u,v)$ имеет одностороннюю производную, например, по u, то

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \mathbf{r}'_u(u,v).$$

В общем случае производные $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ в точке $(u_0, v_0) \in \partial D$ могут не существовать (по той причине, что из области D к точке (u_0, v_0) нельзя подойти ни по прямой $v = v_0$, ни по прямой $u = u_0$).

Если функция $\mathbf{r}(u,v)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D}$, то положим, по определению,

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \mathbf{r}'_u(u,v),$$

$$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \mathbf{r}'_v(u,v)$$

в любой точке $(u_0, v_0) \in \partial D$. Легко видеть, что так доопределенные на ∂D функции $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ будут непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$, поэтому говорят, что они по непрерывности продолжены на границу области D.

Определение 3. Поверхность S, заданная непрерывно дифференцируемой в замкнутой области $\overline{D}$ векторной функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, называется *непрерывно дифференцируемой поверхностью с краем*. Если, кроме того, векторы $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ линейно независимы в любой точке замкнутой области $\overline{D}$, то поверхность S называется *гладкой*.

Очевидно, если кривая γ, заданная уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in [a; b],$$

является границей или частью границы области D, то кривая

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad t \in [a; b]\} \tag{3}$$

является границей или, соответственно, частью границы поверхности S. Причем, если кривая γ гладкая, то кривая Γ тоже гладкая.

Если кривая γ гладкая, то в каждой ее точке определен единичный касательный вектор $\mathbf{t}$ с координатами

$$\cos\alpha = \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$$

и нормальный вектор $\mathbf{n}$ с координатами $\cos\beta, -\cos\alpha$. Очевидно, пара векторов $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ ориентирована так же, как и базис исходной системы координат. Напомним, что ориентация кривой γ считается согласованной с ориентацией области D, если вектор $\mathbf{n}$ является внешней нормалью (относительно области D). В случае, когда на плоскости u, v выбрана правая система координат, это означает, что при обходе кривой γ в направлении вектора $\mathbf{t}$ вектор $\mathbf{n}$ направлен вправо, а область D остается слева. Аналогичная ситуация имеет место и для гладких поверхностей.

Пусть поверхность S и кривая $\Gamma \subset \partial S$ (см.(2) и (3)) являются гладкими и ориентированы своими параметрами. Как и выше, через $\mathbf{t}$ обозначим вектор с координатами $\cos\alpha, \cos\beta$, а через $\mathbf{n}$ — вектор с координатами $\cos\beta, -\cos\alpha$. Тогда в каждой точке кривой Γ определены векторы $\boldsymbol{l}$ и $\mathbf{b}$, равные производным векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$ по направлениям $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$, причем

$$\boldsymbol{l} = \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{t}} = \mathbf{r}'_u \cos\alpha + \mathbf{r}'_v \cos\beta,$$

$$\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{n}} = \mathbf{r}'_u \cos\beta - \mathbf{r}'_v \cos\alpha.$$

Так как определитель матрицы перехода от базиса $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ к базису $\mathbf{b}, \boldsymbol{l}$ равен 1, то они задают одну и ту же ориентацию касательной плоскости, а следовательно, и поверхности S. Этой ориентации соответствует сторона поверхности S, определяемая нормалью

$$\mathbf{n} = [\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v] = [\mathbf{b}, \boldsymbol{l}].$$

Определение 4. Ориентация кривой Γ параметром t и ориентация поверхности S параметрами u, v называются *согласованными*, если вектор $\mathbf{b}$, отложенный от соответствующей точки кривой Γ, направлен от поверхности S.

Если кривая γ параметром t ориентирована положительно относительно области D, то $\boldsymbol{l}$ — это касательный вектор к кривой Γ, а $\mathbf{b}$ — это вектор, лежащий в касательной плоскости и направленный от поверхности S. Следовательно, если кривая γ параметром t ориентирована положительно относительно области D, то ориентация кривой Γ параметром t согласована с ориентацией поверхности S параметрами u, v.

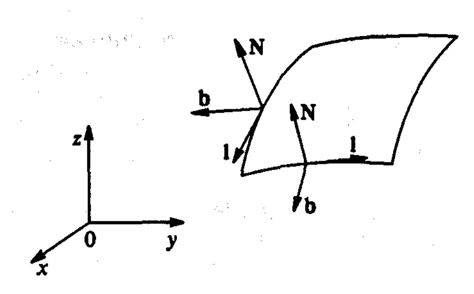


Рис. 12.21

В случае, когда на плоскости u, v и в пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором лежит поверхность S, введены правые системы координат, согласованность ориентаций поверхности S и кривой Γ означает, что при обходе кривой Γ в направлении ориентации по стороне поверхности S, определяемой нормалью $\mathbf{N}$, вектор $\mathbf{b}$ направлен направо, а поверхность S остается слева. Другими словами, в этом случае тройка векторов $\mathbf{N}, \mathbf{b}, \boldsymbol{l}$ является правой (рис. 12.21).

Определение 5. Ориентация гладкой поверхности S и ориентация кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset \partial S$ называются *согласованными*, если ориентация каждого гладкого куска кривой Γ согласована с ориентацией поверхности S (в смысле определения 4).

Если граница гладкой поверхности S состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров и ориентация каждого контура согласована с ориентацией поверхности, то говорят, что *ориентация границы ∂S согласована с ориентацией поверхности S*. В дальнейшем через ∂S, как правило, будем обозначать границу поверхности S, ориентация которой согласована с ориентацией поверхности S.

2.4. Формула Стокса для гладкой параметрически заданной поверхности. Рассмотрим гладкую параметрически заданную поверхность с краем

$$S = \{\mathbf{r}(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D}\}. \tag{1}$$

Будем предполагать, что здесь D — это ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров. Тогда граница (край) поверхности (1) тоже состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров. Любую такую поверхность S будем называть *гладкой поверхностью с кусочно-гладкой границей.*

Если носитель поверхности S содержится в некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^3$, то будем говорить, что поверхность S лежит в G, и писать $S \subset G$.

Теорема. *Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ определены и непрерывно дифференцируемы в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то для любой гладкой поверхности $S \subset G$ с кусочно-гладкой границей ∂S справедливы формулы*

$$\int_{\partial S} P\,dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy, \tag{2}$$

$$\int_{\partial S} Q\,dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz, \tag{3}$$

$$\int_{\partial S} R\,dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx, \tag{4}$$

где ориентации поверхности S и ее границы ∂S согласованы.

Доказательство. Пусть гладкая поверхность S задана уравнением (1) и ориентирована своими параметрами, а граница ∂D области D состоит из одного или нескольких кусочно-гладких контуров вида $\gamma = \{u(t), v(t),\ t \in [a;b]\}$, каждый из которых параметром t ориентирован положительно относительно области D. Тогда, как известно (см. п.2.3), граница ∂S поверхности S состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров вида

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad t \in [a;b]\},$$

ориентация каждого из которых параметром t согласована с ориентацией поверхности S.

Для каждого контура $\Gamma \subset \partial S$ по формулам для вычисления криволинейных интегралов получаем:

$$\int_\Gamma P\,dx = \int_a^b P x'_t\,dt = \int_a^b P(x'_u u'_t + x'_v v'_t)\,dt =$$

$$= \int_\gamma (Px'_u)\,du + (Px'_v)\,dv.$$

Следовательно,

$$\int_{\partial S} P\,dx = \int_{\partial D} (Px'_u)\,du + (Px'_v)\,dv. \tag{5}$$

При дополнительном условии, что функция $x(u,v)$ имеет непрерывную смешанную производную, интеграл по ∂D, согласно формуле Грина, равен следующему двойному интегралу:

$$\iint_D \left(\frac{\partial(Px'_v)}{\partial u} - \frac{\partial(Px'_u)}{\partial v}\right) du\,dv.$$

Преобразуем подынтегральное выражение этого интеграла:

$$\frac{\partial(Px'_v)}{\partial u} - \frac{\partial(Px'_u)}{\partial v} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}x'_u + \frac{\partial P}{\partial y}y'_u + \frac{\partial P}{\partial z}z'_u\right)x'_v -$$

$$- \left(\frac{\partial P}{\partial x}x'_v + \frac{\partial P}{\partial y}y'_v + \frac{\partial P}{\partial z}z'_v\right)x'_u =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}\left(y'_u x'_v - y'_v x'_u\right) + \frac{\partial P}{\partial z}\left(z'_u x'_v - z'_v x'_u\right) =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}.$$

В результате получим равенство

$$\int\limits_{\partial D}(Px'_u)\,du + (Px'_v)\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)du\,dv. \qquad (6)$$

Отметим, что оно справедливо и без предположения, что функция $x(u,v)$ имеет непрерывную смешанную производную. (Это утверждение можно доказать предельным переходом.)

Из равенств (5), (6) и формулы для вычисления поверхностных интегралов следует, что

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx = \iint\limits_{D}\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du\,dv - \iint\limits_{D}\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{S}\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Формула (2) доказана. Формулы (3), (4) доказываются аналогично. Теорема доказана.

Сложив равенства (2), (3), (4), получим формулу

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Эта формула (как, в частности, и любая из формул (2), (3), (4)) называется *формулой Стокса.*

Если поверхность S лежит на плоскости $z = 0$, то, очевидно, формула Стокса превращается в формулу Грина:

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Как и формулу Грина, формулу Стокса удобно записывать с помощью дифференциальных форм. А именно, пусть

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{7}$$

Тогда формула Стокса принимает вид

$$\int\limits_{\partial S} \omega = \iint\limits_{S} d\omega,$$

где ω — *дифференциальная форма* (7), а $d\omega$ — ее *дифференциал*:

$$d\omega = dP\,dx + dQ\,dy + dR\,dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

при вычислении которого считается, что при перестановке двух дифференциалов независимых переменных слагаемое меняет знак на противоположный.

В силу этого правила

$$dy\,dx = -dx\,dy, \quad dz\,dy = -dy\,dz, \quad dx\,dz = -dz\,dx,$$

и, в частности,

$$dx\,dx = 0, \quad dy\,dy = 0, \quad dz\,dz = 0.$$

2.5. Ориентация кусочно-гладкой поверхности и поверхностные интегралы по ориентированным кусочно-гладким поверхностям. Сначала рассмотрим гладкую параметрически заданную поверхность

$$S = \{\mathbf{r}(u,v), (u,v) \in D\},$$

у которой область D гладкой кривой

$$\gamma = \{u(t), v(t), \quad t \in \Delta\}$$

разбита на две области D_1 и D_2. В этом случае гладкая кривая

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad t \in \Delta\}$$

разбивает поверхность S на две гладкие поверхности

$$S_j = \{\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D_j\}, \quad j = 1, 2.$$

Будем считать, что гладкие поверхности S, S_1 и S_2 имеют одну и ту же ориентацию (например, параметрами u, v). Тогда на Γ, как на краю поверхностей S_1 и S_2, возникают ориентации, согласованные с ориентациями S_1 и S_2, соответственно.

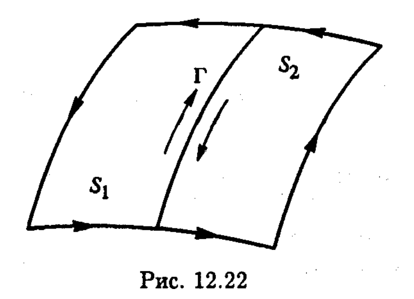


Рис. 12.22

Очевидно, что эти две ориентации кривой Γ противоположны (рис. 12.22).

Это свойство ориентации общей части границы гладких поверхностей положим в основу определения ориентации кусочно-гладкой поверхности, но прежде дадим определение таких поверхностей.

Определение 1. Параметрически заданная поверхность

$$S = \{\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in \overline{D}\},$$

где $\overline{D}$ — замыкание области $D \subset \mathbb{R}^2$, называется *кусочно-гладкой*, если область D кусочно-гладкими кривыми можно разбить на конечное число областей $D_1, \ldots, D_m$ так, что поверхности

$$S_j = \{\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in \overline{D_j}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

будут гладкими.

В этом случае говорят, что поверхность S кусочно-гладкими кривыми разбивается на конечное число гладких кусков $S_1, \ldots, S_m$, или что поверхность S получается склеиванием гладких поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ по указанным кусочно-гладким кривым.

Определим операцию склеивания двух параметрически заданных поверхностей S_1 и S_2 в общем случае, т.е. и в том случае, когда эти поверхности не являются частями некоторой параметрически заданной поверхности.

Пусть

$$S_1 = \{\mathbf{r}_1(u,v), (u,v) \in \overline{D_1}\},$$

$$S_2 = \{\mathbf{r}_2(\xi,\eta), (\xi,\eta) \in \overline{D_2}\},$$

и пусть кривая γ_1 является частью ∂D_1, а кривая γ_2 — частью ∂D_2, причем γ_1 задается уравнениями

$$u = u(t),\ v = v(t), \quad t \in [a;b],$$

а γ_2 — уравнениями

$$\xi = \xi(\tau),\ \eta = \eta(\tau), \quad \tau \in [\alpha;\beta].$$

Тогда, если существует гомеоморфизм $\tau = \varphi(t)$ отрезка $[a;b]$ на отрезок $[\alpha;\beta]$ такой, что

$$\mathbf{r}_1(u(t),v(t)) = \mathbf{r}_2(\xi(\varphi(t)),\eta(\varphi(t))) \quad \forall\, t \in [a;b],$$

т.е. если векторные функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(u(t),v(t)), \qquad t \in [a;b],$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(\xi(\tau),\eta(\tau)), \qquad \tau \in [\alpha;\beta],$$

являются допустимыми представлениями некоторой кривой Γ, то говорят, что *поверхности S_1 и S_2 допускают склеивание по кри-*

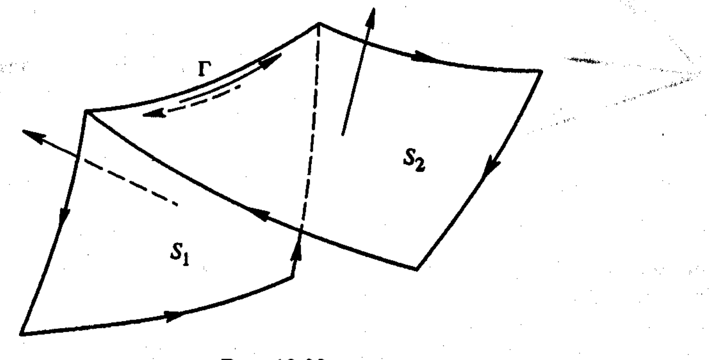


Рис. 12.23

вой Γ или что *поверхности S_1 и S_2 примыкают друг к другу вдоль кривой* Γ (рис. 12.23). В этом случае совокупность поверхностей S_1, S_2 и кривой Γ называется *поверхностью S, склеенной из поверхностей S_1 и S_2 по кривой* Γ, а гомеоморфизм $\tau = \varphi(t)$ — *склеивающим гомеоморфизмом.*

Отметим, что при склеивании точка края поверхности S_1 и соответствующая точка края поверхности S_2 считаются одной точкой поверхности S.

Определение 2. Совокупность конечного числа гладких поверхностей, каждая из которых склеена по одной или нескольким гладким кривым хотя бы с одной поверхностью этой совокупности, называется *кусочно-гладкой поверхностью.*

Пусть две гладкие поверхности S_1 и S_2 ориентированы и склеены по гладкой кривой Г. Тогда на Г, как на краю, возникают ориентации, согласованные с ориентациями S_1 и S_2, соответственно. Если на любой гладкой кривой склеивания эти две ориентации противоположны, то исходные ориентации гладких поверхностей S_1 и S_2 считаются *согласованными.*

Определение 3. Кусочно-гладкая поверхность называется *ориентируемой,* если каждый ее гладкий кусок можно ориентировать так, что любые два склеенных гладких куска будут иметь согласованные ориентации.

Кусочно-гладкая поверхность S называется *ориентированной,* если на каждом ее гладком куске фиксирована некоторая ориентация, причем так, что ориентации склеенных кусков согласованы.

Очевидно, любая ориентированная кусочно-гладкая поверхность S имеет точно две ориентации, которым соответствуют две стороны этой поверхности (как обычно, одну из них будем обозначать S^+, а другую — S^-).

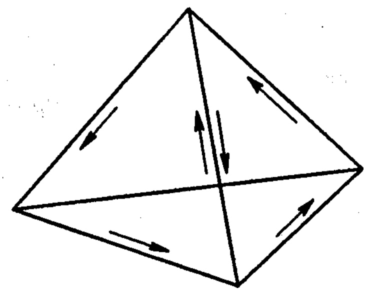


Рис. 12.24

Приведем несколько примеров ориентируемых и неориентируемых поверхностей.

Пример 1. Поверхность любого тетраэдра $ABCD$ (рис. 12.24) является ориентируемой.

Действительно, внешняя сторона грани ABD согласована с ориентацией ее контура от A к B. Внешняя сторона грани BCD согласована с ориентацией ее контура от B к C. А так как отрезок BD, по которому склеены эти грани, в первом случае ориентирован от B к D, а во втором — от D к B, то, согласно определению, ориентации граней ABD и BCD, соответствующие их внешним сторонам, согласованы. Аналогичные рассуждения справедливы для любых двух граней тетраэдра. Следовательно, поверхность тетраэдра ориентируема: она имеет две стороны — внешнюю и внутреннюю.

Пример 2. Сфера является ориентируемой поверхностью.

Действительно, любую сферу, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R > 0,$$

можно представить как поверхность, склеенную из двух полусфер

$$S_{\pm} : z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

по окружности

$$\Gamma : z = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Тогда, выбирая на S_+, например, верхнюю сторону, а на S_- — нижнюю, видим, что соответствующие ориентации окружности Γ будут противопо-

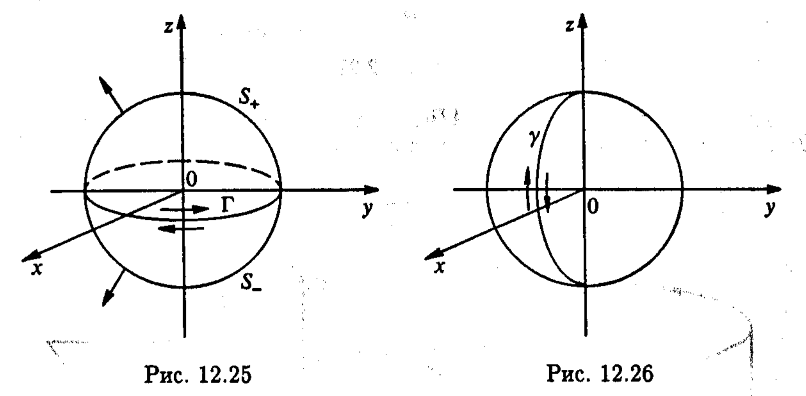


Рис. 12.25 Рис. 12.26

ложными (рис. 12.25). Следовательно, любая сфера является ориентируемой поверхностью. Она имеет две стороны — внешнюю и внутреннюю.

Рассматриваемую сферу часто задают параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\cos\theta, \\ z = R\sin\theta, \end{cases}$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Заметим, что эти уравнения в общем случае задают не сферу, а сферу с разрезом по кривой γ (рис. 12.26), заданной уравнениями

$$x = R\cos\theta, \quad y = 0, \quad z = R\sin\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

У этого разреза имеется два края: один получается при $\varphi = 0$, а другой — при $\varphi = 2\pi$. Чтобы получить сферу, нужно края разреза склеить по кривой γ. Легко видеть, что если сфера как-то ориентирована (например, параметрами φ, θ), то края этого разреза будут иметь противоположную ориентацию.

Пример 3. Если прямоугольник $ABCD$ (рис. 12.27) путем изгиба (но без растяжений и сжатий) склеить по сторонам AD и BC так, что точка A склеивается с точкой B, а точка D — с точкой C, то получим цилиндрическую поверхность.

Здесь края разреза цилиндра AD и BC имеют противоположные ориентации. Следовательно, эта поверхность ориентируема.

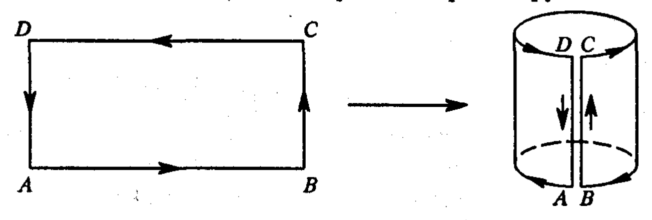


Рис. 12.27

Если же прямоугольник $ABCD$ склеить также по сторонам AD и BC, но так, что точка A склеивается с точкой C, а точка D —

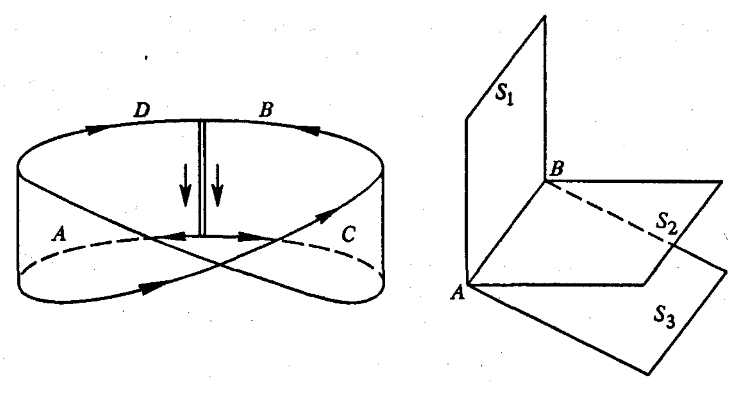


Рис. 12.28 Рис. 12.29

с точкой B, то получим поверхность, которая называется *листом Мебиуса* (рис. 12.28). У нее края разреза имеют одну и ту же ориентацию. Легко видеть, что эта поверхность является неориентируемой. Она обладает многими замечательными свойствами. Здесь отметим лишь одно: она имеет одну сторону. Действительно, если пройдем по листу Мебиуса, не пересекая его границы, от края AD к краю BC, то окажемся в той же точке, но с другой стороны.

Пример 4. Рассмотрим кусочно-гладкую поверхность, изображенную на рис. 12.29. Она склеена из трех гладких кусков S_1, S_2 и S_3 по ребру AB. Легко видеть, что эта поверхность не является ориентируемой.

Определение 4. Пусть S^+ — сторона ориентируемой кусочно-гладкой поверхности S, склеенной из гладких кусков $S_1, \ldots, S_k$, а S_j^+ — соответствующая сторона гладкой поверхности S_j. Тогда

для любой функции f, определенной на поверхности S, сумма интегралов

$$\iint\limits_{S_j^+} f\,dx\,dy, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

называется *поверхностным интегралом по S^+ от функции f* и обозначается $\iint\limits_{S^+} f\,dx\,dy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{S^+} f\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{k} \iint\limits_{S_j^+} f\,dx\,dy.$$

Аналогично, по определению,

$$\iint\limits_{S^+} f\,dy\,dz = \sum_{j=1}^{k} \iint\limits_{S_j^+} f\,dy\,dz,$$

$$\iint\limits_{S^+} f\,dz\,dx = \sum_{j=1}^{k} \iint\limits_{S_j^+} f\,dz\,dx.$$

Так же определяется и интеграл по S^+ от дифференциальной формы

$$\omega = P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy,$$

где P, Q, R — функции, определенные на поверхности S. А именно, по определению,

$$\iint\limits_{S^+} \omega = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{k} \iint\limits_{S_j^+} \omega.$$

Теорема. *Если дифференциальная форма ω определена и непрерывно дифференцируема в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то для любой ориентируемой кусочно-гладкой поверхности $S \subset G$ с кусочно-гладкой границей ∂S справедлива формула Стокса*

$$\int\limits_{\partial S} \omega = \iint\limits_{S} d\omega, \tag{1}$$

где ориентации поверхности S и ее границы ∂S согласованы.

Доказательство. Пусть поверхность S склеена из гладких поверхностей S_j, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Тогда по формуле Стокса для гладких поверхностей имеем:

$$\int\limits_{\partial S_j} \omega = \iint\limits_{S_j} d\omega, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

где ориентации S_j и ∂S_j согласованы.

Из того, что поверхность S ориентируема, следует, что на гладких кусках S_j можно выбрать ориентации так, что если Γ — гладкая кривая, по которой склеивается два куска, то ориентации Γ, согласованные с ориентациями этих кусков, будут противоположными. Поэтому если поверхность S ориентирована, то сложив левые и правые части равенств (2), получим формулу (1), так как интегралы по кривым склеивания взаимно уничтожаются. Теорема доказана.

§ 3. Формула Остроградского–Гаусса

3.1. Формула Остроградского–Гаусса для областей, элементарных относительно осей координат. Область G пространства $\mathbb{R}^3$ с фиксированной декартовой системой координат x, y, z называется *элементарной относительно оси* z, если

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in g, \ \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y)\}, \tag{1}$$

где g — измеримая область плоскости $\mathbb{R}^2$, а функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ непрерывны на замкнутой области $\overline{g}$.

Аналогично определяются *области, элементарные относительно осей* x *и* y, соответственно. А именно, область G называется *элементарной относительно оси* x, если

$$G = \{(x, y, z) : (y, z) \in g, \ \varphi_1(y, z) < x < \varphi_2(y, z)\}.$$

А если

$$G = \{(x, y, z) : (z, x) \in g, \ \varphi_1(z, x) < y < \varphi_2(z, x)\},$$

то область G называется *элементарной относительно оси* y.

Лемма 1. *Пусть область G элементарна относительно оси z. Тогда, если функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна на замкнутой области $\overline{G}$, а ее производная f'_z непрерывна и ограничена на G, то*

$$\iiint\limits_G \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} f\, dx\, dy, \tag{2}$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне границы ∂G области G.

Доказательство. Пусть область G задана равенством (1). Тогда ее граница ∂G состоит из поверхностей S_1 и S_2, которые являются графиками функций

$$z = \varphi_j(x, y), \quad (x, y) \in g, \ i = 1, 2,$$

и поверхности S_0, которая является частью цилиндрической поверхности $\partial g \times \mathbb{R}$.

Согласно данным выше определениям,

$$\iint\limits_{\widehat{S}_j} f\,dx\,dy = \iint\limits_{g} f(x, y, \varphi_i(x, y))\,dx\,dy,$$

где $\widehat{S}_j$ — верхняя сторона поверхности S_j, $j = 1, 2$, а интеграл по S_0 равен нулю. Отсюда и из формулы сведения кратного интеграла к повторному получаем:

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{g} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\widehat{S}_2} f\,dx\,dy - \iint\limits_{\widehat{S}_1} f\,dx\,dy.$$

Для завершения доказательства формулы (2) осталось заметить, что верхняя сторона поверхности S_2 и нижняя сторона поверхности S_1 являются внешними относительно области G. Следовательно, если S_j^+ — внешняя сторона поверхности $S_j, i = 0, 1, 2$, то

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_2^+} f\,dx\,dy + \iint\limits_{S_1^+} f\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0^+} f\,dx\,dy.$$

Лемма 1 доказана.

Аналогично доказывается, что если функция f непрерывна на замыкании области G, которая элементарна относительно оси x (оси y), а ее производная по x (по y) непрерывна и ограничена на G, то

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} f\,dy\,dz \tag{3}$$

$$\left(\iiint\limits_{G} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} f\,dz\,dx\right), \tag{4}$$

где ∂G — внешняя сторона границы области G.

Теорема 1. *Пусть область G элементарна относительно всех осей координат. Тогда, если функции P, Q, R определены и непрерывны на замыкании области G, а их производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны и ограничены на G, то*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \\ = \iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{5}$$

где ∂G — внешняя сторона границы области G.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что область G и функции P, Q, R такие, что для R справедлива формула (2), для P — формула (3), а для Q — формула (4). Поэтому, применив к функции R формулу (2), к функции P формулу (3), а к функции Q формулу (4) и сложив полученные равенства, в результате получим формулу (5). Теорема 1 доказана.

Формула (5) называется *формулой Остроградского–Гаусса.* Как и формулы Грина и Стокса, ее удобно записывать с помощью дифференциальных форм.

Пусть

$$\omega = P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{6}$$

Тогда формула (5) принимает вид

$$\iint\limits_{\partial G} \omega = \iiint\limits_G d\omega, \tag{7}$$

где $d\omega$ — дифференциал формы ω, при вычислении которого считается, что если в произведении дифференциалов dx, dy, dz поменять местами два соседних множителя, то оно поменяет знак. Например,

$$dy\,dz\,dx = -dy\,dx\,dz = dx\,dy\,dz.$$

В частности, если в этом произведении два одинаковых множителя, то оно равно нулю. Например, $dy\,dy\,dz = dz\,dy\,dz = 0$. Таким образом,

$$d\omega = dP\,dy\,dz + dQ\,dz\,dx + dR\,dx\,dy = \\ = \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\,dz\,dx + \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\,dx\,dy = \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Лемма 2. *Пусть область G можно разбить на конечное число областей $G_1, \ldots, G_N$, каждая из которых элементарна относительно оси z. Тогда, если функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна на замкнутой области G, а ее производная f'_z непрерывна и ограничена в любой области G_i, то справедлива формула* (2).

Доказательство. Пусть область G разбита на области

$$G_i = \{(x, y) \in g_i, \quad \varphi_{i1}(x, y) < z < \varphi_{i2}(x, y)\},$$

где g_i — измеримая область, а φ_{i1} и φ_{i2} — непрерывные на $\overline{g_i}$ функции. Через S_{ij} обозначим поверхность, заданную уравнением

$$z = \varphi_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in g_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, и $j = 1, 2$. Тогда, как уже доказано,

$$\iiint\limits_{G_i} \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{S_{i1}^+} f\, dx\, dy + \iint\limits_{S_{i2}^+} f\, dx\, dy, \tag{8}$$

где S_{ij}^+ — внешняя сторона поверхности S_{ij} по отношению к области G_i.

Если области g_i и g_k не пересекаются, то, очевидно области G_i и G_k могут примыкать друг к другу только по множеству, лежащему на цилиндрической поверхности с образующей параллельной оси z, интеграл по которому от $f\, dx\, dy$ равен нулю. Если же области g_i и g_k, $k \neq i$, пересекаются, то границы областей G_i и G_k могут иметь общую часть S, заданную уравнением вида

$$z = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in g_i \cap g_k.$$

Очевидно, внешняя сторона поверхности S по отношению к области G_i будет внутренней стороной по отношению к области G_k, поэтому при сложении равенств (8) интегралы по S взаимно уничтожаются. Лемма 2 доказана.

Аналогично доказывается, что если функция f непрерывна на замкнутой области $\overline{G}$, которую можно разбить на конечное число областей $G_1, \ldots, G_N$, каждая из которых элементарна относительно оси x (оси y), а ее производная f'_x (f'_y) непрерывна и ограничена в любой области G_i, то справедлива формула (3) (формула (4)).

Теорема 2. *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$ такая, что относительно каждой оси координат ее можно разбить на конечное число элементарных областей. Тогда, если функции P, Q, R определены и непрерывны на замыкании области G, а их производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны и ограничены на G, то для дифференциальной формы* (6) *справедлива формула Остроградского–Гаусса* (7).

3.2. Согласованные ориентации области и ее границы. В пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором выбрана некоторая декартова система координат, любая открытая клетка $\Delta = (a_1; b_1) \times (a_2; b_2) \times (a_3; b_3)$, является простейшей областью, элементарной относительно всех осей координат. Следовательно, если функции P, Q, R определены и непрерывны на $\overline{\Delta}$, а их производные P'_x, Q'_y, R'_z непрерывны и интегрируемы на Δ, то справедлива формула Остроградского–Гаусса

$$\iiint\limits_{\Delta} d\omega = \iint\limits_{\partial\Delta} \omega, \tag{1}$$

где $\omega = P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ и интеграл от ω берется по внешней стороне границы $\partial\Delta$ клетки Δ.

Отметим, что в формуле (1) ориентация каждого гладкого куска $S \subset \partial\Delta$, т.е. каждой грани клетки Δ, выбирается следующим образом: если $\mathbf{N}$ — единичный вектор внешней нормали, то ориентирующий базис $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ на S выбирается так, что тройка векторов $\{\mathbf{N}, \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ задает ту же ориентацию, что и исходная система координат (см. рис. 12.30 и рис. 12.31).

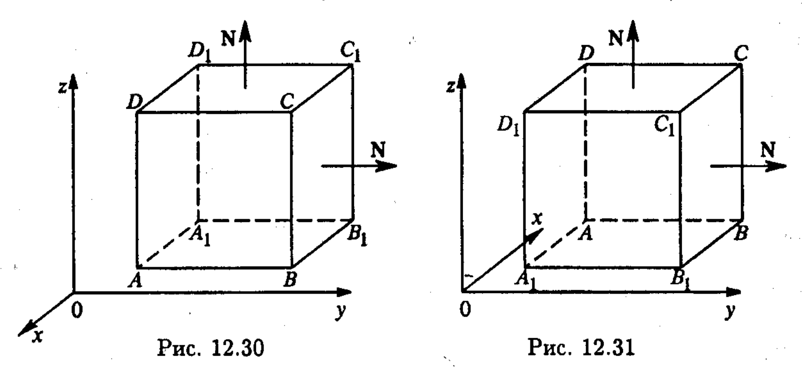


Рис. 12.30 Рис. 12.31

Например, плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ клетки Δ задается уравнением $x = a_1$, и на ней можно ввести две естественные системы координат $u = y$, $v = z$ и $u = z$, $v = y$. Система координат (y, z) ориентирует верхнюю сторону (относительно оси x) грани $A_1B_1C_1D_1$, которая является внутренней стороной этой грани (относительно клетки Δ) и определяется нормалью $\mathbf{i}$. Тогда внешняя сторона грани $A_1B_1C_1D_1$ определяется нормалью $-\mathbf{i}$, а ориентация этой стороны грани $A_1B_1C_1D_1$ — параметрами $u = z$, $v = y$. Очевидно, что тройки векторов $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ и $\{-\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{j}\}$ принадлежат к одному классу ориентации пространства $\mathbb{R}^3$. В этом случае говорят, что ориентация клетки Δ координатами x, y, z и ориентация ее грани $A_1B_1C_1D_1$ параметрами $u = z$, $v = y$ согласованы. Оче-

видно, что ориентация грани $ABCD$ координатами y, z согласована с ориентацией клетки Δ координатами x, y, z. Дадим точное определение этому понятию в общем случае.

Пусть гладкая поверхность S является границей или частью границы области $G \subset \mathbb{R}^3$, причем область G лежит по одну сторону от поверхности S. Это означает, что у любой точки $M_0 \in S$ существует окрестность $O(M_0)$ такая, что если отрезок $[M_1M_2]$ нормали к S в точке M_0 содержится в $O(M_0)$ и $M_1 \in G$, а $M_2 \notin \overline{G}$, то отрезок $[M_0M_1]$ содержится в $\overline{G}$, а отрезок $[M_0M_2]$ — в $\mathbb{R}^3 \backslash G$. Тогда луч $[M_0M_1)$ называется *внутренней нормалью,* а луч $[M_0M_2)$ — *внешней нормалью к поверхности S в точке M_0 относительно области G.*

Определение. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором фиксирована некоторая правая (или левая) прямоугольная система координат, задана область G, и пусть гладкая параметрически заданная поверхность $S = \{\mathbf{r}(u,v), \quad (u,v) \in D\}$ является частью границы ∂G этой области и ориентирована параметрами u, v. Через $\mathbf{N} = \mathbf{N}(M)$ обозначим вектор внешней нормали к поверхности S в точке $M \in S$. Тогда ориентация поверхности S называется *согласованной* с ориентацией области G, если в каждой точке $M \in S$ тройка векторов $\{\mathbf{N}, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v\}$ является правой (левой).

Другими словами, ориентация гладкой поверхности $S \subset \partial G$ называется согласованной с ориентацией области $G \subset \mathbb{R}^3$, если тройки векторов $\{\mathbf{N}, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v\}$ и $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ относятся к одному классу ориентации (т.е. определитель матрицы перехода больше нуля).

Пусть кусочно-гладкая поверхность $S \subset \partial G$ склеена из гладких поверхностей S_1 и S_2 по гладкой кривой Γ. Покажем, что положительные ориентации кривой Γ относительно внешних сторон поверхностей S_1 и S_2 являются противоположными и, следовательно, внешние стороны этих поверхностей образуют сторону поверхности S в смысле определения стороны кусочно-гладкой поверхности.

Пусть внешняя сторона поверхности S_α, $\alpha = 1, 2$ ориентирована параметрами u_α, v_α. Через $\mathbf{N}_\alpha$ обозначим единичный вектор внешней нормали к поверхности S_α в точке $M \in \Gamma$, а через $\boldsymbol{l}_\alpha$ — единичный вектор касательной к кривой Γ, задающий положительную относительно S_α ориентацию на Γ. Тогда, согласно данному выше определению, тройки векторов $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{r}_{u_1}, \mathbf{r}_{v_1}\}$ и $\{\mathbf{N}_2, \mathbf{r}_{u_2}, \mathbf{r}_{v_2}\}$ относятся к одному классу ориентации. С другой стороны, если $\mathbf{n}_\alpha$ — единичный вектор, который в точке $M \in \Gamma$ ортогонален $\mathbf{N}_\alpha$ и $\boldsymbol{l}_\alpha$ и направлен от поверхности S_α, то тройки векторов $\{\mathbf{N}_\alpha, \mathbf{r}_{u_\alpha}, \mathbf{r}_{v_\alpha}\}$ и $\{\mathbf{N}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha, \boldsymbol{l}_\alpha\}$ принадлежат тоже одному классу ориентации. Следовательно, тройки векторов $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{n}_1, \boldsymbol{l}_1\}$ и $\{\mathbf{N}_2, \mathbf{n}_2, \boldsymbol{l}_2\}$ относят к одному классу ориентации (к которому относится базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$).

Касательную плоскость к поверхности S_2 в точке $M \in \Gamma$ повернем вокруг касательной к кривой Γ так, чтобы век-

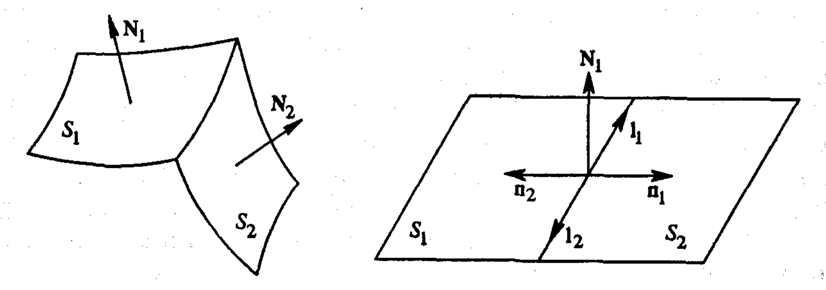


Рис. 12.32

тор $\mathbf{N}_2$ совпал с вектором $\mathbf{N}_1$ (рис. 12.32). Тогда вектор $\mathbf{n}_2$ преобразуется в вектор $-\mathbf{n}_1$. При повороте ориентация не меняется, поэтому тройки векторов $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{n}_1, \boldsymbol{l}_1\}$ и $\{\mathbf{N}_1, -\mathbf{n}_1, \boldsymbol{l}_2\}$ должны относится к одному классу ориентации. Следовательно, $\boldsymbol{l}_2 = -\boldsymbol{l}_1$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть S_1^+ — внешняя сторона грани $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 12.30 и 12.31). Тогда, если Δ^* — проекция этой грани на плоскость $x = 0$, то

$$\iint\limits_{S_1^+} P\,dy\,dz = \iint\limits_{\Delta^*} P(a_1, y, z)\,dy\,dz,$$

а с другой стороны,

$$\iint\limits_{S_1^+} P\,dy\,dz = -\iint\limits_{\Delta^*} P(a_1, y, z)\,dz\,dy.$$

Здесь в первом случае плоскость $x = 0$ ориентирована координатами $\{y, z\}$, а во втором случае — координатами $\{z, y\}$. Таким образом, если плоскость $x = 0$ ориентирована, то

$$\iint\limits_{\Delta^*} P\,dy\,dz = -\iint\limits_{\Delta^*} P\,dz\,dy.$$

В общем случае вводится следующее определение *ориентированного двойного интеграла* (или *двойного интеграла по ориентированной области*).

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ фиксирована некоторая декартова система координат x, y. Тогда, по определению,

$$\iint\limits_G f\,dx\,dy = \iint f\,dG, \qquad \iint\limits_G f\,dy\,dx = -\iint f\,dG,$$

где $\iint f\,dG$ — обычный двойной интеграл от функции f по множеству $G \subset \mathbb{R}^2$.

При таком определении двойного интеграла по ориентированной области формула замены переменных в двойном интеграле почти полностью совпадает с соответствующей формулой для однократных интегралов. А именно, пусть диффеоморфизм $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ с отличным от нуля якобианом отображает область Ω на область G. Тогда

$$\iint\limits_G f\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega f\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta.$$

Отметим, что здесь под интегралом стоит якобиан отображения, а не модуль якобиана.

3.3. Формула Остроградского–Гаусса для простых областей. Область G в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z называется *простой относительно оси* z, если

$$G = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \psi_1(x,y) < z < \psi_2(x,y)\}, \tag{1}$$

где D — простая область на плоскости $z = 0$, а функции $\psi_1(x,y)$ и $\psi_2(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в D и непрерывны на $\overline{D}$.

Аналогично определяются *простые области, относительно оси Ox и Oy*, соответственно.

Область G называется *простой*, если она простая относительно хотя бы одной из осей координат.

Теорема 1. *Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ определены и непрерывны на замыкании простой области G. Тогда, если они непрерывно дифференцируемы и их производные ограничены на G, то справедлива формула Остроградского–Гаусса:*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{2}$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне границы ∂G области G.

13 Зак. 193

Доказательство. Пусть область G элементарна относительно оси z и задана равенством (1). Пусть далее область D является простой относительно оси y, причем

$$D = \Big\{(x, y) : x \in (a; b),\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\Big\}.$$

Область G будет образом открытой клетки $\Delta = (a; b) \times (0; 1) \times (0; 1)$ при отображении

$$\begin{cases} x = \xi, \\ y = \varphi_1(\xi) + \eta(\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)), \\ z = \psi_1(\xi, y) + \zeta(\psi_2(\xi, y) - \psi_1(\xi, y)), \end{cases} \tag{3}$$

где в последнем равенстве вместо y стоит его выражение через ξ и η. Очевидно,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = (\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi))(\psi_2(\xi, y) - \psi_1(\xi, y)).$$

При отображении (3) нижняя грань $ABCD$, клетки Δ

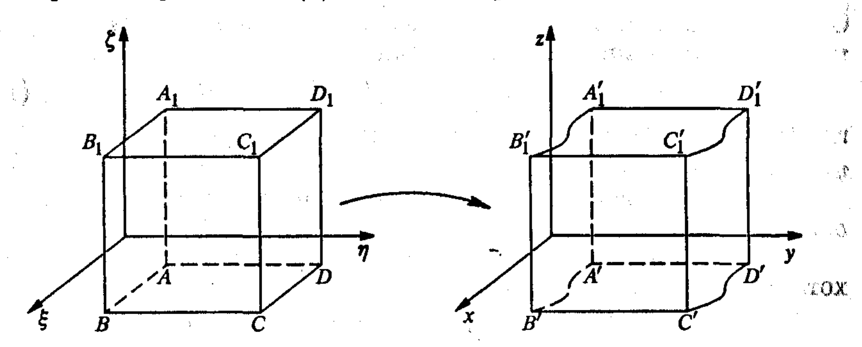


Рис. 12.33

(рис. 12.33) переходит в поверхность $A'B'C'D'$, заданную уравнением

$$z = \psi_1(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

верхняя грань $A_1B_1C_1D_1$ — в поверхность $A_1'B_1'C_1'D_1'$, заданную уравнением

$$z = \psi_2(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

а боковые грани — в боковые грани области G. Причем внешняя сторона каждой грани клетки Δ переходит во внешнюю сторону

соответствующего гладкого куска границы ∂G области G. Поэтому, согласно формуле замены переменных, имеем:

$$\iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial\Delta} P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta + P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)}\,d\eta\,d\zeta + P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)}\,d\zeta\,d\xi.$$

Отсюда по формуле Остроградского–Гаусса для клетки Δ получаем, что

$$\iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}\right)\right) d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Легко вычисляется, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} + \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} &= 0,\\
\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} + \frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} &= 0,\\
\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} + \frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} + \frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} &= 0,\\
\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} + \frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \iiint\limits_{G}\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогично,

$$\iint\limits_{\partial G} Q\,dz\,dx = \iiint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(\eta,\xi)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(\zeta,\xi)}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(\xi,\eta)}\right)\right) d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \iiint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \iiint\limits_{G}\frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz.$$

Для завершения доказательства формулы (2) осталось заметить, что равенство

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} R\,dx\,dy$$

доказано в п. 3.1. (даже при более слабых ограничениях на область G и функцию R). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть область G получается из простой области Ω с помощью некоторого поворота. Тогда, если функции P, Q, R непрерывны на замыкании области G, а их производные непрерывны и ограничены в G, то справедлива формула Остроградского–Гаусса* (2).

Доказательство. Пусть поворот, переводящий область Ω в область G, задан формулами

$$x = x(\xi,\eta,\zeta), \qquad y = y(\xi,\eta,\zeta), \qquad z = (\xi,\eta,\zeta).$$

Тогда

$$\iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial\Omega} P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)}\,d\eta\,d\zeta + P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)}\,d\zeta\,d\xi = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}\right)\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Легко проверяется, что для любого дважды дифференцируемого отображения справедливы равенства:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} + \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial\xi}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} + \frac{\partial P}{\partial\eta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} + \frac{\partial P}{\partial\zeta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \iiint\limits_{G}\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогично доказываются соответствующие равенства для Q и R. Теорема 2 доказана.

3.4. Формула Остроградского–Гаусса для областей с гладкими и кусочно-гладкими границами. Как и на плоскости (см. п.1.7 этой главы), область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *областью с гладкой границей*, если у любой точки $M_0 \in \partial G$ существует прямоугольная окрестность $\Pi(M_0)$ такая, что множество $G \cap \Pi(M_0)$ является простой областью, а часть границы $\partial G \cap \Pi(M_0)$ имеет явное представление.

Образно область с гладкой границей можно определить как область без углов и ребер. Согласно определению, ее граница в некоторой окрестности каждой своей точки является гладкой явно заданной поверхностью. Отметим, что граница такой области, вообще говоря, может быть несвязным множеством.

Покажем, что для любой ограниченной области G с гладкой границей ∂G справедлива формула Остроградского–Гаусса.

Открытые клетки $\Pi(M_0)$, $M_0 \in \partial G$, (см. определение области с гладкой границей) образуют покрытие множества ∂G. Каждую клетку $\Pi(M_0)$ этого покрытия уменьшим вдоль осей координат так, чтобы новая клетка $\Pi'(M_0)$ была окрестностью точки M_0 и лежала строго внутри $\Pi(M_0)$. Очевидно, открытые клетки $\Pi'(M_0)$, $M_0 \in \partial G$, снова образуют покрытие множества ∂G. А так как ∂G — компакт, то существует конечное число клеток $\Pi'(M_0)$, которые покрывают ∂G. Пусть клетки

$$\Pi'(M_1), \ldots, \Pi'(M_n) \tag{1}$$

образуют это конечное покрытие множества ∂G.

Очевидно, множество $G_0 = G \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Pi'(M_j)$ замкнуто и лежит строго внутри области G, поэтому каждая его точка M_0 имеет прямоугольную окрестность $\Pi(M_0)$, замыкание которой не пересекается с ∂G. Как и выше, через $\Pi'(M_0)$ обозначим новую открытую клетку, которая является окрестностью точки M_0 и лежит строго внутри $\Pi(M_0)$. Очевидно, клетки $\Pi'(M_0)$, $M_0 \in G_0$, образуют покрытие множества G_0, а так как оно компактное, то существует конечное число этих клеток:

$$\Pi'(M_{n+1}), \ldots, \Pi'(M_N), \tag{2}$$

которые покрывают G_0.

Таким образом, совокупность множеств (1) и (2) является покрытием замкнутой области $\overline{G}$, причем это покрытие такое, что каждая область

$$G_j = G \cap \Pi(M_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

является простой.

Пусть функции

$$l_j(x, y, z), \quad j = 1, \ldots, N,$$

образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию (1), (2) замкнутой области $\overline{G}$. Тогда, если $\omega = P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$, то

$$\iiint\limits_G d\omega = \iiint\limits_G d\left(\sum_{j=1}^N l_j\omega\right) = \sum_{j=1}^N \iiint\limits_{G_j} d(l_j\omega).$$

А так как для области G_j справедлива формула Остроградского–Гаусса, то

$$\iiint\limits_G d\omega = \sum_{j=1}^N \iint\limits_{\partial G_j} l_j\omega.$$

Здесь $l_j \equiv 0$ на ∂G_j для $j > n$, а для $j \leqslant n$ функция l_j может быть отличной от нуля только на той части ∂G_j, которая лежит на ∂G. Следовательно,

$$\iiint\limits_G d\omega = \sum_{j=1}^N \iint\limits_{\partial G} l_j\omega = \iint\limits_{\partial G} \omega.$$

Сформулируем доказанное утверждение.

Теорема. *Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ определены и непрерывны на замыкании ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей. Тогда, если они непрерывно дифференцируемы на G и их производные ограничены, то справедлива формула Остроградского–Гаусса*

$$\iiint\limits_G d\omega = \iint\limits_{\partial G} \omega. \tag{3}$$

Здесь, как обычно, $\omega = P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$, а поверхностный интеграл берется по внешней стороне границы ∂G области G.

Аналогично доказывается формула (3) и для ограниченной области G с кусочно-гладкой границей ∂G в случае, когда у каждой точки $M_0 \in \partial G$ существует окрестность $O(M_0)$ такая, что область $G \cap O(M_0)$ простая или некоторым поворотом отображается в простую область.

3.5. Геометрический смысл знака якобиана отображения. Пусть Ω — некоторая область координатного пространства ξ, η, ζ, и пусть Φ — непрерывно дифференцируемое отображение области Ω в координатное пространство x, y, z. Будем предполагать, что якобиан

отображения Φ отличен от нуля в Ω, т.е. либо всюду в Ω положителен, либо всюду отрицателен. Тогда, как известно, множество $G = \Phi(\Omega)$, т.е. образ области Ω, тоже будет областью.

Легко показать, что если поверхность $\Sigma \subset \Omega$ гладкая, то ее образ $S = \Phi(\Sigma)$ тоже будет гладкой поверхностью.

Через ω обозначим произвольную область с гладкой границей σ, замыкание которой содержится в Ω.

Теорема 1. *Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $\Phi : \Omega \to G$ с отличным от нуля якобианом взаимно однозначно. Тогда, если якобиан отображения Φ положителен (отрицателен) на Ω, то положительная ориентация границы области ω при отображении Φ индуцирует положительную (отрицательную) ориентацию границы области $g = \Phi(\omega)$.*

Доказательство. Из формулы Остроградского–Гаусса следует, что

$$mg = \iint\limits_{\partial g} x\,dy\,dz,$$

где ∂g — положительно ориентированная граница области g. Применив формулу замены переменных в поверхностном интеграле, получим:

$$mg = \varepsilon \iint\limits_{\partial\omega} x\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)}\,d\eta\,d\zeta + x\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)}\,d\zeta\,d\xi + x\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta, \quad (1)$$

где, как обычно, $\partial\omega$ — положительно ориентированная граница области ω, и поэтому $\varepsilon = +1$, если при отображении Φ ориентация $\partial\omega$ индуцирует ориентацию ∂g, и $\varepsilon = -1$ в противном случае.

Поверхностный интеграл в равенстве (1) преобразуем по формуле Остроградского–Гаусса. Тогда

$$mg = \varepsilon \iiint\limits_{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(x\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(x\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(x\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}\right)\right) d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Легко проверяется, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} + \frac{\partial}{\partial\eta}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\zeta)} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\zeta,\xi)} + \frac{\partial x}{\partial\zeta}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}.$$

Следовательно,

$$mg = \varepsilon \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

и поэтому

$$\varepsilon \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} > 0 \quad \text{в} \quad \omega,$$

что, как легко видеть, и доказывает наше утверждение.

Таким образом, *если якобиан отображения положительный, то ориентация границы при этом отображении сохраняется, а если отрицательный, то ориентация меняется.* В этом и состоит *геометрический смысл якобиана отображения.*

§ 4. Интегралы от дифференциальных форм и формула Стокса

4.1. Ориентация гладкого параметрически заданного многообразия. В n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ множество всех аффинных систем координат разбивается на два класса эквивалентности следующим образом: две системы координат относятся к одному классу, если определитель матрицы перехода положителен, в противном случае они относятся к разным классам.

Аналогично, множество произвольных (криволинейных) систем координат, которые получаются одна из другой с помощью некоторых диффеоморфизмов с отличным от нуля якобианом, тоже разбивается на два класса эквивалентности. А именно, две системы координат относятся к одному классу, если якобиан соответствующего диффеоморфизма положителен, в противном случае они относятся к разным классам.

Эти классы эквивалентности называют *классами ориентации систем координат* в пространстве $\mathbb{R}^n$, а пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированным классом ориентации систем координат — *ориентированным пространством.* Другими словами, ориентированное пространство $\mathbb{R}^n$ — это пространство $\mathbb{R}^n$, в котором фиксирована некоторая система координат и допустимыми преобразованиями координат являются диффеоморфизмы с положительным якобианом.

Аналогичные классы ориентации систем координат можно рассмотреть и для любого гладкого параметрически заданного k-мерного многообразия S.

Пусть гладкое многообразие S задано отображением

$$x = \varphi(u), \quad u \in D, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. На S параметры

$u_1, \ldots, u_k$ являются координатами, а допустимые преобразования параметров, которые являются диффеоморфизмами с отличным от нуля якобианом, — преобразованиями координат на S. Следовательно, множество всех возможных систем координат на S разбивается на два класса эквивалентности, которые на S задают две возможные ориентации.

Гладкое многообразие с фиксированной ориентацией называется *ориентированным.* Для ориентированного многообразия допустимыми преобразованиями параметров (которые и задают ориентацию) являются диффеоморфизмы с положительным якобианом.

В случае, когда $k = n - 1$, применяется еще и другой способ ориентации многообразия S в ориентированном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть S — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие, заданное отображением (1) при $k = n - 1$. Тогда в каждой точке $M \in S$ определены касательные векторы

$$\mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}\mathbf{e}_j, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — канонический базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. Отметим, что так как многообразие S гладкое, то векторы (2) линейно независимы в любой точке $M \in S$.

Рассмотрим вектор $\mathbf{N}(M)$, равный разложению по первой строке «определителя»

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix}$$

в точке $M \in S$, т.е. вектор

$$\mathbf{N}(M) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}\mathbf{e}_j, \tag{3}$$

где значок «$\widehat{\ }$» над x_j означает, что x_j отсутствует. Этот вектор отличен от нуля в любой точке $M \in S$ и задает одну из двух нормалей к многообразию S в точке M, причем он такой, что векторная функция $\mathbf{N}(M)$, $M \in S$, непрерывна на S.

Говорят, что любая непрерывная на S векторная функция из единичных нормалей $\mathbf{n}(M)$, $M \in S$, определяет одну из *сторон многообразия* S.

Из предыдущих рассуждений следует, что *любое гладкое параметрически заданное $(n-1)$-мерное многообразие S имеет две и только две стороны:* одна определяется нормалью $\mathbf{N}(M)$, а другая — нормалью $\mathbf{N}(M)$.

Говорят, что *ориентация многообразия S параметрами $u_1, \ldots, u_{n-1}$ и его сторона, определяемая нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$, согласованы*, если определитель матрицы перехода от канонического базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ к базису $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{n-1})$ больше нуля, т.е. если эти базисы относятся к одному классу ориентации пространства $\mathbb{R}^n$.

Из формул (2) и (3) следует, что у гладкого $(n-1)$-мерного многообразия S, заданного отображением (1), его ориентация параметрами $u_1, \ldots, u_{n-1}$ и его сторона, определяемая нормалью (3), всегда согласованы.

Пусть многообразие S имеет явное задание

$$x_i = \varphi(x_i, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n), \quad (x_i, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) \in D.$$

В этом случае из формулы (3) получаем, что у нормали $\mathbf{N}$ i-я координата равна $(-1)^{i-1}$. Следовательно, нормаль $\mathbf{N}$ для нечетных i определяет *верхнюю сторону* (относительно оси x_i) многообразия S, а для четных i — *нижнюю сторону*, и поэтому ориентация многообразия S координатами $x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$ согласована с его верхней стороной при нечетном i и с нижней при четном i.

4.2. Интегралы по гладким параметрически заданным многообразиям. Пусть непрерывно дифференцируемое отображение

$$x = \varphi(u), \quad u \in D, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, задает гладкое k-мерное многообразие S в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что это многообразие ориентировано своими параметрами, и поэтому допустимыми преобразованиями параметров на S являются диффеоморфизмы с положительным якобианом.

Определение. Пусть гладкое k-мерное многообразие S задано отображением (1) и ориентировано своими параметрами. Тогда для любой функции f, определенной на S, и любого набора из k координат $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ число, равное k-кратному интегралу

$$\int\limits_D f(\varphi(u)) \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}\, du,$$

называется *интегралом от формы*

$$f\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} \tag{2}$$

по многообразию S и обозначается

$$\int\limits_S f\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}. \tag{3}$$

В этом обозначении символы dx_{i_1}, …, dx_{i_k}, как обычно, будем называть *дифференциалами переменных* x_{i_1}, …, x_{i_k}. Отметим, что введенная здесь форма (2) является простейшей дифференциальной формой k-го порядка. (Подробнее дифференциальные формы будут рассмотрены в п. 4.3.)

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_S f\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} = \int\limits_D f\,(\varphi(u))\,\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots,u_k)}\,du. \tag{4}$$

Покажем, что это определение интеграла (2) является корректным. А именно, покажем, что значение интеграла (2) не зависит от способа параметризации многообразия S.

Пусть многообразие S, заданное отображением (1), имеет другое допустимое представление

$$x = \psi(\xi), \quad \xi \in D^*,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Тогда, согласно определению, существует диффеоморфизм $u = u(\xi)$ области D^* на область D, якобиан которого больше нуля. А так как

$$\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_k)} = \frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots,u_k)}\cdot\frac{\partial(u_1,\ldots,u_k)}{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_k)}, \tag{5}$$

то по формуле замены переменных в кратном интеграле получаем равенство

$$\int\limits_{D^*} f\,\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_k)}\,d\xi = \int\limits_D f\,\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots,u_k)}\,du, \tag{6}$$

которое и доказывает наше утверждение.

Отметим некоторые основные свойства интегралов вида (3).

1°. *Если в интеграле* (3) *поменять местами два соседних дифференциала, то его значение изменит знак на противоположный.* Например,

$$\int\limits_S f\,dx_{i_1}\,dx_{i_2}\,dx_{i_3}\ldots dx_{i_k} = -\int\limits_S f\,dx_{i_2}\,dx_{i_1}\,dx_{i_3}\ldots dx_{i_k}.$$

2°. *Если в интеграле* (3) *среди дифференциалов* $dx_{i_1},\ldots,dx_{i_k}$ *есть одинаковые, то он равен нулю.*

3°. *Если в интеграле* (3) *поменять ориентацию многообразия* S, *то его значение изменит знак на противоположный.* Например, если S^+ — многообразие, заданное отображением (1) и ориентированное своими параметрами, а S^- — противоположно ориентированное многообразие, то

$$\int\limits_{S^-} f\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} = -\int\limits_{S^+} f\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}.$$

Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из формулы (4). Докажем свойство 3.

Пусть S^- — многообразие S, ориентированное параметрами ξ, которые связаны с параметрами u диффеоморфизмом $u = u(\xi)$ с отрицательным якобианом. Тогда, в силу равенства (5), по формуле замены переменных в кратном интеграле вместо равенства (6) получаем:

$$\int\limits_{D^*} f\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_k)}\,d\xi = -\int\limits_{D} f\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots,u_k)}\,du,$$

что и доказывает наше утверждение.

Отметим несколько частных случаев формулы (4).

Если $k = 1$ и $n \geqslant 2$, то S — это кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданная отображением $x = \varphi(u)$, $u \in \Delta$, где Δ — некоторый промежуток прямой $\mathbb{R}^1$. Тогда

$$\int\limits_{S} f\,dx_i = \int\limits_{\Delta} f(\varphi(u))\varphi_i'(u)\,du, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где кривая S ориентирована параметром u.

Если $k = 2$ и $n \geqslant 3$, то S — это двумерная поверхность в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданная отображением $x = \varphi(u,v)$, $(u,v) \in D$, где D — измеримая область плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\iint\limits_{S} f\,dx_i\,dx_j = \iint\limits_{D} f(\varphi(u,v))\frac{\partial(x_i,x_j)}{\partial(u,v)}\,du\,dv,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где поверхность S ориентирована параметрами u, v.

Наконец, если $k = n$, то S — это некоторая область G в пространстве $\mathbb{R}^n$, которая является образом области $D \subset \mathbb{R}^n$ при отображении $x = \varphi(u)$ и которая ориентирована координатами $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Тогда

$$\int\limits_{G} f(x)\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_n} = \int\limits_{D} f(\varphi(u))\frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}\,du,$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. В частности, если $x = u$, то

$$\int\limits_G f(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_n} = (-1)^\alpha \int\limits_G f(x)\, dx,$$

где α — число транспозиций, при помощи которых перестановка $i_1, i_2, \ldots, i_n$ получается из $1, 2, \ldots, n$. В этой формуле в левой части стоит интеграл по области G, ориентированной координатами $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, а справа — интеграл по области G, ориентированной координатами $x_1, \ldots, x_n$.

Рассмотрим еще случай, когда $(n-1)$-мерное многообразие S имеет явное задание

$$x_i = \varphi(u), \quad u \in D, \tag{7}$$

где D — измеримая область на гиперплоскости $x_i = 0$, а $u = (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$ — точка на этой гиперплоскости (значок «$\hat{\ }$» над x_i означает, что x_i отсутствует). Из формулы (4) следует, что если S ориентировано координатами $x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$, то

$$\int\limits_S f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n = \int\limits_D f\, du.$$

У любого $(n-1)$-мерного многообразия S, имеющего явное задание вида (7), естественным образом определяются верхняя сторона и нижняя сторона относительно оси x_i. Известно, что ориентация многообразия S координатами $x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$ при нечетном i согласована с его верхней стороной, а при четном i — с его нижней стороной. Поэтому если $\hat{S}$ — внешняя сторона многообразия S, то

$$\int\limits_{\hat{S}} f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n = (-1)^{i-1} \int\limits_S f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n,$$

где в последнем интеграле многообразие S ориентировано координатами $x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$.

В конце выведем формулу замены переменных для интегралов вида (3).

Пусть гладкое k-мерное многообразие S является образом гладкого k-мерного многообразия S^* при диффеоморфизме $x = x(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда если S^* задано отображением $\xi = \xi(u)$, $u \in D$, где $u = (u_1, \ldots, u_k)$, то S имеет представление $x = x(\xi(u))$, $u \in D$.

В определение интеграла от формы (2) по многообразию S входит (см.(4)) определитель квадратной матрицы

$$\left\| \frac{\partial x_{i_\alpha}}{\partial u_\beta} \right\|, \tag{8}$$

которая является произведением двух прямоугольных матриц

$$\left\| \frac{\partial x_{i_\alpha}}{\partial \xi_j} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \frac{\partial \xi_j}{\partial u_\beta} \right\|,$$

где $i_\alpha = i_1, \ldots, i_k$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\beta = 1, \ldots, k$.

Согласно формуле Бине–Коши, для определителя матрицы (8) справедливо равенство

$$\frac{\partial(x_{i_1} \ldots x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)} = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \frac{\partial(x_{i_1} \ldots x_{i_k})}{\partial(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k})} \cdot \frac{\partial(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)},$$

где суммирование идет по всем наборам из целых чисел $(j_1, \ldots, j_k)$ таких, что $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$.

Теперь отсюда и из формулы (4) получаем формулу

$$\int\limits_S f\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = \int\limits_{S^*} \sum_{j_1 < \cdots < j_k} f(x(\xi)) \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k})} d\xi_{j_1} \ldots d\xi_{j_k},$$

которую будем называть *формулой замены переменных в интеграле по k-мерному многообразию.*

4.3. Дифференциальные формы. В предыдущих параграфах мы уже пользовались понятием дифференциальной формы. Например, на плоскости рассматривались дифференциальная форма $\omega = P\,dx + Q\,dy$ и ее дифференциал

$$d\omega = dP\,dx + dQ\,dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

В этом пункте рассмотрим дифференциальные формы произвольного k-го порядка от n переменных.

Определение 1. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^n$ определено конечное семейство непрерывных (или непрерывно дифференцируемых) функций $a_{i_1 \ldots i_k}(x)$, занумерованных k индексами $i_1, \ldots, i_k$, каждый из которых может принимать любое целое значение от 1 до n. Тогда для любого гладкого k-мерного многообразия S, заданного отображением

$$x = x(u), \quad u \in D, \tag{1}$$

где $x \in G$, $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, число, равное k-кратному интегралу

$$\int\limits_D \sum a_{i_1 \ldots i_k}(x(u)) \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}\, du, \tag{2}$$

где суммирование идет по всем функциям $a_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ из данного семейства, называется *интегралом от дифференциальной формы k-го порядка*

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} \tag{3}$$

по многообразию S и обозначается $\int\limits_S \omega$.

Согласно этому определению, *дифференциальная форма* (3) — это оператор, который каждому гладкому k-мерному многообразию S, заданному отображением (1) и ориентированному своими параметрами, ставит в соответствие число, равное k-кратному интегралу (2).

Функции $a_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ называются *коэффициентами дифференциальной формы* (3), а формы $dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$ — *базисными дифференциальными формами k-го порядка.*

Любую непрерывную функцию $f(x)$ будем считать *дифференциальной формой нулевого порядка.*

Заметим, что у дифференциальной формы ω некоторые (или даже все) коэффициенты могут быть равными нулю. Очевидно, такие слагаемые в форме ω можно опустить.

Дифференциальную форму ω, у которой все коэффициенты равны нулю, будем называть *нулевой* и писать $\omega = 0$.

Для дифференциальных форм можно определить *сумму* и *произведение.* Их складывают и умножают по правилам сложения и умножения многочленов, но без изменения порядка дифференциалов. Например, если заданы дифференциальные формы

$$\omega_\alpha = a(x)\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_k}, \tag{4}$$

$$\omega_\beta = b(x)\, dx_{\beta_1} \ldots dx_{\beta_p}, \tag{5}$$

порядка k и p, соответственно, то дифференциальная форма $(k+p)$-го порядка

$$a(x)b(x)\, dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_k}\, dx_{\beta_1} \ldots dx_{\beta_p}$$

называется *произведением дифференциальных форм ω_α и ω_β* и обозначается $\omega_\alpha \omega_\beta$. Очевидно, что в общем случае $\omega_\alpha \omega_\beta \neq \omega_\beta \omega_\alpha$.

В произведении $\omega_\alpha \omega_\beta$ дифференциальные формы ω_α и ω_β могут иметь произвольные порядки. Однако сумма определяется

только для форм одного порядка. Например, если заданы дифференциальные формы ω_α и ω_β k-го порядка (см. (4) и (5)), то дифференциальная форма k-го порядка

$$a(x)\,dx_{\alpha_1}\dots dx_{\alpha_k} + b(x)\,dx_{\beta_1}\dots dx_{\beta_k}$$

называется *суммой дифференциальных форм* ω_α *и* ω_β и обозначается $\omega_\alpha + \omega_\beta$.

Таким образом, любая базисная форма k-го порядка равна произведению k базисных форм 1-го порядка, а любая дифференциальная форма k-го порядка есть линейная комбинация базисных форм k-го порядка.

Определение 1 делает естественным следующие *правила преобразований дифференциальных форм*:

1. Можно менять местами слагаемые. Например,

$$a(x)\,dx_{\alpha_1}\dots dx_{\alpha_k} + b(x)\,dx_{\beta_1}\dots dx_{\beta_k} = \\ = b(x)\,dx_{\beta_1}\dots dx_{\beta_k} + a(x)\,dx_{\alpha_1}\dots dx_{\alpha_k}.$$

2. Можно приводить подобные, т.е. объединять слагаемые с одинаковыми индексами. Например,

$$a(x)\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k} + b(x)\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k} = \\ = (a(x) + b(x))\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k}.$$

3. Если в сумме (3) у некоторого слагаемого

$$a(x)\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k}$$

среди индексов есть два равных, то это слагаемое можно опустить, т.е. считать его равным нулю.

4. Если у некоторого слагаемого поменять местами два соседних дифференциала, то оно поменяет знак. Например,

$$a(x)\,dx_{i_2}\,dx_{i_1},\,dx_{i_3}\dots dx_{i_k} = -a(x)\,dx_{i_1}\,dx_{i_2}\dots dx_{i_k}.$$

Определение 2. Для любой дифференциальной формы k-го порядка

$$\omega = \sum a_{i_1\dots i_k}(x)\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k}$$

с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами $a_{i_1\dots i_k}(x)$, дифференциальная форма $(k+1)$-го порядка

$$\sum_{j=1}^{n}\sum \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i_1\dots i_k}(x)\,dx_j\,dx_{i_1}\dots dx_{i_k}$$

называется *дифференциалом формы* ω и обозначается $d\omega$.

Согласно этому определению, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, то ее обычный дифференциал

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j$$

является и ее дифференциалом как формы нулевого порядка. Однако, как легко видеть, дифференциал от дифференциала как формы 1-го порядка всегда является нулевой формой.

Вообще, $d(d\omega) = 0$ для любой формы ω с дважды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами.

В конце отметим, что из формулы замены переменных в интеграле по k-мерному многообразию естественным образом следует формула перехода к новым переменным в дифференциальной форме k-го порядка. А именно, если переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ связаны диффеоморфизмом $x = x(\xi)$, то

$$a(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} a(x(\xi)) \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k})}\, d\xi_{j_1} \ldots d\xi_{j_k}, \qquad (6)$$

где суммирование идет по всем наборам из целых чисел $(j_1, \ldots, j_k)$ таких, что $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$.

Заметим, что если в форме $a(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$ дифференциалы $dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_k}$ формально заменим на их выражения через дифференциалы $d\xi_1, \ldots, d\xi_n$ и упростим полученное выражение по правилам преобразования дифференциальных форм, то получим формулу (6). (Докажите это утверждение в качестве упражнения.)

4.4. Согласованные ориентации гладкого многообразия и его края. Рассмотрим многообразие S, заданное непрерывным отображением

$$x = x(u), \quad u \in \overline{D}, \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_k), 1 \leqslant k \leqslant n$, а $\overline{D}$ — замыкание области $D \subset \mathbb{R}^k$. Как обычно, точка этого многообразия называется *внутренней* (*граничной*) *точкой*, если она является образом внутренней (граничной) точки области D. Совокупность всех граничных точек многообразия S называется *краем многообразия* S и обозначается ∂S.

Если отображение (1) непрерывно дифференцируемо в замкнутой области $\overline{D}$, то многообразие S называется *непрерывно дифференцируемым многообразием с краем.* Если, кроме того, ранг матрицы Якоби отображения (1) в $\overline{D}$ равен k, то многообразие S называется *гладким k-мерным многообразием* (с краем).

Пусть $(k-1)$-мерное гладкое многообразие γ, заданное отображением

$$u = u(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) \in \Omega, \tag{2}$$

является границей или частью границы области D. Тогда, согласно определению, гладкое $(k-1)$-мерное многообразие Γ, заданное отображением

$$x = x(u(\xi)), \quad \xi \in \Omega, \tag{3}$$

является краем или частью края многообразия S.

В каждой точке многообразия γ определены касательные векторы

$$\mathbf{t}_i = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

и единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ (относительно области D). Напомним, что ориентация многообразия $\gamma \subset \partial D$ параметрами $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ согласована с ориентацией области D координатами $u_1, \ldots, u_k$, если $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{k-1})$ и заданный базис в D относятся к одному классу ориентации.

Определение 1. Пусть гладкое k-мерное многообразие S задано отображением (1), гладкое $(k-1)$-мерное многообразие $\gamma \subset \subset \partial D$ — отображением (2), а гладкое многообразие $\Gamma \subset \partial S$ — отображением (3), и пусть эти многообразия ориентированы своими параметрами. Тогда, если ориентация многообразия γ согласована с ориентацией области D, то соответствующую ориентацию $\Gamma \subset \partial S$ будем называть *согласованной с ориентацией S* и будем говорить, что Γ ориентировано *положительно* относительно многообразия S.

Гладкое k-мерное многообразие S, заданное отображением (1), называется *многообразием с кусочно-гладким краем*, если граница области D является объединением конечного числа гладких $(k-1)$-мерных многообразий. Если каждое такое $(k-1)$-мерное многообразие ориентировано положительно относительно S, то говорят, что *ориентации S и ∂S согласованы* или что *край ∂S многообразия S ориентирован положительно.*

4.5. Ориентация кусочно-гладкого многообразия. Сначала определим *операцию склеивания* двух параметрически заданных многообразий.

Пусть многообразия S_1 и S_2 заданы, соответственно, отображениями

$$x = \varphi(u), \quad u = (u_1, \ldots, u_k) \in D_1,$$

$$x = \psi(v), \quad v = (v_1, \ldots, v_k) \in D_2,$$

и пусть многообразие γ_1, заданное отображением

$$u = u(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) \in \Omega_1,$$

является частью ∂D_1, а многообразие γ_2, заданное отображением

$$v = v(\eta), \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}) \in \Omega_2,$$

— частью ∂D_2. Тогда, если существует гомеоморфизм $\eta = \eta(\xi)$ области Ω_1 на область Ω_2 такой, что

$$\varphi(u(\xi)) = \psi(v(\eta(\xi))) \quad \forall \xi \in \Omega_1,$$

т.е. если отображения $x = \varphi(u(\xi))$, $\xi \in \Omega_1$, и $x = \psi(v(\eta))$, $\eta \in \Omega_2$, являются допустимыми представлениями некоторого многообразия Γ, то говорят, что *многообразия S_1 и S_2 допускают склеивание по многообразию* Γ. В этом случае совокупность многообразий S_1, S_2 и Γ называется *многообразием S, склеенным из многообразий S_1 и S_2 по многообразию* Γ, а гомеоморфизм $\eta = \eta(\xi)$ — *склеивающим гомеоморфизмом.*

Определение 1. Совокупность конечного числа гладких k-мерных многообразий, каждое из которых склеено по одному или нескольким $(k-1)$-мерным многообразиям хотя бы с одним из данных k-мерных многообразий, называется *кусочно-гладким k-мерным многообразием.*

Пусть два гладких k-мерных многообразия S_1 и S_2 ориентированы и склеены по $(k-1)$-мерному гладкому многообразию Γ. Тогда на Γ, как на краю, возникают ориентации, согласованные с ориентациями S_1 и S_2 соответственно. Если на любом гладком многообразии склеивания эти две ориентации противоположны, то ориентации многообразий S_1 и S_2 называются *согласованными.*

Определение 2. Кусочно-гладкое k-мерное многообразие S называется *ориентируемым*, если каждый его гладкий кусок можно ориентировать так, что любые два склеенных многообразия будут иметь согласованные ориентации. Если на гладких кусках выбраны согласованные ориентации, то многообразие S называется *ориентированным.*

Определение 3. Пусть S — ориентированное кусочно-гладкое k-мерное многообразие, склеенное из гладких многообразий $S_1, \ldots, S_N$, и пусть на этих многообразиях определена дифференциальная форма ω k-го порядка. Тогда сумма интегралов от ω по S_j, $j = 1, \ldots, N$, называется *интегралом от формы ω по многообразию S* и обозначается $\int\limits_S \omega$.

Пусть кусочно-гладкое многообразие S склеено из гладких k-мерных многообразий $S_1, \ldots, S_N$ с кусочно-гладкими границами. Тогда точка края любого из S_j, не являющаяся точкой склейки, называется *граничной точкой многообразия* S, а множество всех таких точек — *краем* (или *границей*) многообразия S и обозначается ∂S. Если многообразие S ориентировано, то на ∂S определяется, как и для гладких многообразий, ориентация, согласованная с ориентацией S.

4.6. Формула Остроградского–Гаусса в n-мерном пространстве. Сначала рассмотрим так называемые элементарные области.

Как обычно, область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *элементарной относительно оси* x_i, если

$$G = \left\{x : \varphi_1(u) < x_i < \varphi_2(u), \quad u \in D\right\},$$

где D — измеримая область на гиперплоскости $x_i = 0$, $u = (x_1, \ldots \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$, а функции $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ непрерывны на замыкании области D. (Здесь значок «$\hat{}$» над x_i означает, что x_i отсутствует.)

Область G называется *элементарной*, если она элементарна относительно одной из осей координат. Граница ∂G элементарной области G состоит из цилиндрической поверхности и графиков двух непрерывных функций.

Пусть область G элементарна относительно оси x_i, и пусть на G задана функция, которая непрерывна на замкнутой области $\overline{G}$, а в G имеет ограниченную непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Докажем, что при этих условиях справедлива формула

$$\int\limits_{\partial G} f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n = \int\limits_G \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n, \qquad (1)$$

где значок «$\hat{}$» над dx_i означает, что если $i \neq 1$, то на i-м месте dx_i отсутствует (dx_i всегда стоит на первом месте).

В формуле (1) слева стоит интеграл от дифференциальной формы $(n-1)$-го порядка

$$f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n$$

по внешней стороне границы ∂G области G, а справа — интеграл от формы n-го порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n$$

по области G, ориентированном координатами $x_i, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$.

Согласно определению интеграла по ориентированной области,

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n = (-1)^{i-1} \int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx, \tag{2}$$

где справа стоит обычный кратный интеграл по области G. А так как область G элементарна относительно оси x_i, то

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int_D du \int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i =$$

$$= \int_D f(u, \varphi_2(u))\, du - \int_D f(u, \varphi_1(u))\, du,$$

где через $f(u, \varphi_j(u))$, $j = 1, 2$, обозначены значения функции f при $x_i = \varphi_j(u)$.

Известно (см. п.4.2), что

$$\int_D f(u, \varphi_j(u))\, du = \int_{S_j} f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n,$$

где через S_j обозначено многообразие, которое является графиком функции

$$x_i = \varphi_j(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$$

и ориентировано координатами $x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$. Этот интеграл и интеграл по верхней стороне $\widehat{S}_j$ многообразия S_j связаны соотношением

$$\int_{\widehat{S}_j} f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n = (-1)^{i-1} \int_{S_j} f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n.$$

Следовательно,

$$\int_D f(u, \varphi_j(u))\, du = (-1)^{i-1} \int_{\widehat{S}_j} f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n,$$

и поэтому

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = (-1)^{i-1} \int_{\widehat{S}_2} f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n -$$

$$-(-1)^{i-1} \int_{\widehat{S}_1} f\, dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n.$$

А так как интеграл от $f\,dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n$ по цилиндрической части границы области G равен нулю, то

$$\int\limits_G \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx = (-1)^{i-1} \int\limits_{\partial G} f\,dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n, \tag{3}$$

где ∂G — внешняя сторона границы области G.

Теперь формула (1) следует из (2) и (3).

Из доказанного утверждения следует, что если область G элементарна относительно всех осей координат, а функции $a_i(x)$ непрерывно дифференцируемы в G и непрерывны на $\overline{G}$, то

$$\int\limits_{\partial G} \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,dx_i\,dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n. \tag{4}$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{\partial G} \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n = \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,dx. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) будем называть *формулами Остроградского–Гаусса в n-мерном пространстве.*

При $n = 2$ формула (4) — это формула Грина. Действительно, в этом случае она имеет вид

$$\int\limits_{\partial G} a_1\,dx_2 + a_2\,dx_1 = \int\limits_G \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\,dx_2\,dx_1.$$

Если здесь положить $a_2 = P$, $a_1 = Q$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, то получится обычный вид формулы Грина:

$$\int\limits_{\partial G} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

При $n = 3$ формула (4) — это уже известная формула Остроградского–Гаусса. Действительно, в этом случае она имеет вид

$$\int\limits_{\partial G} a_1\,dx_2\,dx_3 + a_2\,dx_1\,dx_3 + a_3\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int\limits_G \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\,dx_2\,dx_1\,dx_3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\,dx_3\,dx_1\,dx_2.$$

Положим здесь $a_1 = P$, $a_2 = -Q$, $a_3 = R$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Тогда эта формула принимает вид

$$\iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

С помощью дифференциальных форм формула Остроградского–Гаусса записывается следующим образом:

$$\int\limits_{\partial G} \omega = \int\limits_{G} d\omega,$$

где $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\,dx_1 \ldots d\hat{x}_i \ldots dx_n$.

Выше формула Остроградского–Гаусса (4) доказана для областей элементарных относительно осей координат. Как видно, это доказательство почти дословно повторяет соответствующее доказательство этой формулы при $n = 3$. Аналогичным образом доказывается, что формула (4) справедлива для любой ограниченной области G, которую можно разбить на конечное число областей элементарных относительно всех осей координат.

Понятие простой области в $\mathbb{R}^n$ вводится по индукции: для $n = 2$ оно уже определено, а для $n > 2$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *простой*, если она элементарна относительно одной из осей координат, причем, если она задана равенством (1), то $(n-1)$-мерная область D простая, а функции φ_1 и φ_2 непрерывно дифференцируемы в D и непрерывны на $\overline{D}$.

Так же, как и в случае $n = 3$, сведением к клетке Δ доказывается, что формула Остроградского–Гаусса справедлива для любой простой области.

Область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью с гладкой границей* ∂G, если у каждой точки $M_0 \in \partial G$ существует n-мерная окрестность $O(M_0)$ такая, что множество $G \cap O(M_0)$ является простой областью, причем многообразие $\partial G \cap O(M_0)$ является графиком непрерывно дифференцируемой функции.

Как и в случае $n = 3$, с помощью соответствующего разбиения единицы формула Остроградского–Гаусса доказывается для любой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Отметим, что таким образом доказывается более общее утверждение. А именно, доказывается, что формула Остроградского–Гаусса справедлива для любой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$, граница которой обладает следующим свойством: у каждой точки $M_0 \in \partial G$ существует n-мерная окрестность $O(M_0)$ такая, что для области $G \cap O(M_0)$ справедлива формула Остроградского–Гаусса. Этот класс областей включает все важные для приложений области с кусочно-гладкими границами.

4.7. Формула Стокса в n-мерном пространстве. Пусть S — гладкое $(k+1)$-мерное многообразие с краем, заданное отображением

$$x = \varphi(u), \quad u \in \overline{D}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_{k+1})$, $1 \leqslant k < n$, а $\overline{D}$ — замыкание области $D \subset \mathbb{R}^{k+1}$.

Через ∂S обозначим край многообразия S, который по определению является образом границы ∂D области D. Будем считать, что ∂D склеена из конечного числа гладких k-мерных многообразий и что для D справедлива формула Остроградского–Гаусса. При этих условиях докажем формулу

$$\int\limits_{\partial S} f\, dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{S} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j\, dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_k}, \tag{2}$$

где функция f определена и непрерывно дифференцируема в некоторой n-мерной окрестности многообразия S, а ориентации многообразия S и его края ∂S согласованы.

Пусть граница области D склеена из конечного числа гладких k-мерных многообразий γ, заданных отображением вида

$$u = u(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \Omega,$$

и что каждое из них своими параметрами ориентировано положительно относительно области D. Тогда, если Γ — образ γ при отображении (1), то, согласно определению,

$$\int\limits_{\Gamma} f\, dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_k} = \int\limits_{\Omega} f(\varphi(u(\xi)))\, \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_k)}\, d\xi.$$

А так как

$$\frac{\partial x_{i_\alpha}}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\partial x_{i_\alpha}}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}, \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \ldots, k, \\ i = 1, 2, \ldots, k, \end{array}$$

т.е. матрица Якоби $\left\| \dfrac{\partial x_{i_\alpha}}{\partial \xi_i} \right\|$ есть произведение прямоугольных матриц

$$\left\| \frac{\partial x_{i_\alpha}}{\partial u_j} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right\|,$$

то для ее определителя, согласно формуле Бине–Коши, справедливо равенство

$$\frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_k)} = \\ = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, u_{k+1})} \cdot \frac{\partial(u_1, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, u_{k+1})}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_k)},$$

где обозначение $\hat{u}_j$ означает, что в матрицах Якоби вычеркнут j-й столбец или, соответственно, j-я строка. Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} f\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = \sum_{j=1}^{k+1} \int\limits_{\gamma} f(\varphi(u)) J_j(u)\, du_1 \ldots d\hat{u}_j \ldots du_{k+1},$$

где

$$J_j(u) = \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, u_{k+1})}.$$

Просуммировав эти равенства по всем гладким многообразиям $\gamma \subset \partial D$ и $\Gamma \subset \partial S$, получим равенство

$$\int\limits_{\partial S} f\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = \sum_{j=1}^{k+1} \int\limits_{\partial D} f(\varphi(u)) \cdot J_j(u)\, du_1 \ldots d\hat{u}_j \ldots du_{k+1}.$$

По условию, для области $D \subset \mathbb{R}^{k+1}$ справедлива формула Остроградского–Гаусса. Поэтому

$$\int\limits_{\partial S} f\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k} = \\ = \sum_{j=1}^{k+1} \int\limits_{D} \frac{\partial}{\partial u_j} \Big(f(\varphi(u)) J_j(u) \Big)\, du_j\, du_1 \ldots d\hat{u}_j \ldots du_{k+1}.$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial u_j} J_j(u) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} J_j(u) = \frac{\partial(x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_{k+1})}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\partial S} f\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{D}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial(x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_{k+1})}\,du$$

что и доказывает формулу (2).

Из определения ориентированного кусочно-гладкого многообразия следует, что формула (2) справедлива и для любого такого многообразия S.

Таким образом, если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы непрерывно дифференцируемая дифференциальная форма ω k-го порядка и кусочно-гладкое ориентированное $(k+1)$-мерное многообразие S с кусочно-гладким k-мерным краем ∂S, то

$$\int\limits_{\partial S}\omega = \int\limits_{S} d\omega, \qquad (3)$$

где ориентации S и ∂S согласованы. Формула (3) называется *формулой Стокса*. Отметим, что при $k = n - 1$ эта формула превращается в формулу Остроградского–Гаусса.

Глава 13

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Дифференциальные операции векторного анализа

1.1. Производная по направлению и градиент скалярного поля. Если на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f : G \to \mathbb{R}$, то часто говорят, что на G задано скалярное поле $f(M)$, $M \in G$. В дальнейшем, как правило, будем предполагать, что G — это область n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, в котором введена прямоугольная декартова система координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В § 5 главы 6 уже рассматривались скалярные поля. А именно, там были определены производная по направлению и градиент функции $f(M)$ или, что то же самое, скалярного поля $f(M)$, $M \in$ $\in G$. Там же был введен оператор Гамильтона ∇.

Было доказано, что если функция f дифференцируема в точке M, то в этой точке скалярное поле f имеет производную по любому направлению l. Причем, если направление l задано единичным вектором $\boldsymbol{l}$ с координатами $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n$, то

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \sum_{i=i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cos\alpha_i, \tag{1}$$

где частные производные по x_i вычислены в точке M.

Напомним, что вектор с координатами

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{2}$$

называется градиентом скалярного поля f и обозначается $\operatorname{grad} f$, т.е. по определению, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — орты системы координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

Из равенства (1) следует, что производная векторного поля f в точке M по направлению l, которое задано ортом $\boldsymbol{l}$, равна скалярному произведению векторов $\operatorname{grad} f$ и $\boldsymbol{l}$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{l}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\operatorname{grad} f| \cos\alpha,$$

где α — угол, который образует вектор $\operatorname{grad} f$ с направлением l. Отсюда следует, что

$$\max_l \frac{\partial f}{\partial l} = |\operatorname{grad} f|,$$

причем этот максимум достигается при $\alpha = 0$. Следовательно, $\operatorname{grad} f$ в точке M задает направление наибольшего возрастания поля f в точке M и скорость этого возрастания. Это свойство градиента скалярного поля можно принять за определение. Оно, в частности, показывает, что векторное поле $\operatorname{grad} f(M)$, $M \in G$, определяется только скалярным полем $f(M)$ и не зависит от системы координат. В частности, в любой прямоугольной декартовой системе координат $\operatorname{grad} f$ имеет координаты (2).

Если скалярное поле f непрерывно дифференцируемо в области $G \subset \mathbb{R}^n$, то у любой точки $M_0 \in G$, в которой $\operatorname{grad} f \neq \mathbf{0}$, существует окрестность, в которой уравнение

$$f(x) = f(M_0) \tag{3}$$

задает $(n-1)$-мерную гладкую поверхность. Эта поверхность называется поверхностью уровня, проходящей через точку M_0. Доказано, что в любой точке поверхности уровня $\operatorname{grad} f$ ортогонален этой поверхности. Отметим, что при $n = 2$ уравнение (3) задает некоторую линию, которую называют линией уровня данного скалярного поля f.

Напомним еще, что при изучении скалярных и векторных полей часто используют «символический вектор»

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

который называется оператором Гамильтона или оператором набла. Тогда

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \frac{\partial f}{\partial l} = (\nabla f, \boldsymbol{l}).$$

Последнее равенство можно переписать еще и так:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\boldsymbol{l}, \nabla) f,$$

где

$$(\boldsymbol{l}, \nabla) = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Следовательно, взятие производной от функции f по направлению l, которое определяется единичным вектором $\boldsymbol{l}$, равносильно применению к f дифференциального оператора (4), который формально равен скалярному произведению единичного вектора $\boldsymbol{l}$ и векторного оператора ∇.

1.2. Векторные поля. Условия потенциальности векторного поля. Если на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ задана векторная функция $\mathbf{a}(M) : G \to \mathbb{R}^k$, то говорят, что на G задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$. В дальнейшем будем считать, что G — это n-мерная область, и что $k = n$.

Потенциальные векторные поля достаточно полно изучались в §6 главы 7. Здесь лишь напомним основные понятия и некоторые свойства таких полей.

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$, $M \in G$, называется потенциальным в области G, если существует скалярная функция $u(M)$, градиент которой в точке $M \in G$ равен $\mathbf{a}(M)$. Тогда функция $u(M)$ называется потенциалом векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Если непрерывное векторное поле $\mathbf{a}(M)$ в области G имеет потенциал $u(M)$, то работа этого поля по любому кусочно-гладкому пути $\breve{AB} \subset G$ равна разности $u(B) - u(A)$, т.е. справедливо равенство

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = u(B) - u(A). \qquad (1)$$

Оно напоминает формулу Ньютона–Лейбница. Поэтому, как и эту формулу, равенство (1) иногда записывают еще и так:

$$\int\limits_{\breve{AB}} (\nabla u,\, dx) = u(x)\Big|_A^B,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Из равенства (1) следует, что векторное поле имеет потенциал в области G тогда и только тогда, когда его циркуляция по любому кусочно-гладкому контуру $\gamma \subset G$ равна нулю.

Легко видеть, что если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a}(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, в области G имеет потенциал, то координаты вектора $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j. \qquad (2)$$

Доказывается, что если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a}(x)$ в области G удовлетворяет условиям интегрируемости (2), то это векторное поле локально потенциальное, т.е. у любой

точки $M \in G$ существует окрестность, в которой оно потенциально. Примеры показывают, что в общем случае оно может не иметь потенциала в области G. Однако, если векторное поле удовлетворяет условиям интегрируемости в односвязной области, то в этой области оно имеет потенциал.

Отметим, что на прямой, т.е. при $n = 1$, любое непрерывное поле имеет потенциал: им является любая первообразная функция $a_1(x)$. В общем случае условия интегрируемости (2) состоят из $n(n-1)/2$ равенств. В частности, при $n = 2$ они сводятся к одному равенству, а при $n = 3$ — к трем равенствам.

1.3. Дифференциальные операторы grad, rot, div в $\mathbb{R}^3$. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксирован некоторый ортонормированный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и соответствующая декартова система координат x, y, z. И пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано скалярное поле f. Тогда, если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M \in G$, то, как известно, вектор

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

называется градиентом скалярного поля f в точке M.

Определение 1. Дифференциальный оператор, который определен на дифференцируемых скалярных полях и каждому такому полю $f(M)$, $M \in G$, сопоставляет векторное поле $\operatorname{grad} f(M)$, $M \in G$, называется *градиентом скалярного поля* и обозначается grad.

Оператор grad является одним из основных дифференциальных операторов теории поля. Рассмотрим еще два дифференциальных оператора, которые определены на дифференцируемых векторных полях.

Определение 2. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ определено векторное поле $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Тогда, если оно дифференцируемо в точке $M \in G$, то число

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией векторного поля* $\mathbf{a}$ *в точке* M и обозначается $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$, а вектор с координатами

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y},$$

называется *ротором* (или *вихрем*) *векторного поля* $\mathbf{a}$ *в точке* M и обозначается $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ (или $\operatorname{curl} \mathbf{a}(M)$).

Таким образом, по определению,

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \quad (1)$$

Определение 3. Дифференциальный оператор, который определен на дифференцируемых векторных полях и каждому такому полю $\mathbf{a}(M)$, $M \in G$, ставит в соответствие скалярное поле $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$, $M \in G$, (соотв., векторное поле $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$, $M \in G$) называется *дивергенцией* (соотв., *ротором) векторного поля* и обозначается div (соотв., rot).

Физическая интерпретация дивергенции будет рассмотрена в следующем параграфе. Здесь же рассмотрим только один пример, поясняющий физический смысл ротора векторного поля.

Пример. Пусть все пространство вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг некоторой оси. Введем в пространстве декартову систему координат, приняв ось вращения за ось z. Тогда, если (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты точки M в начальный момент времени $t = 0$, то в момент времени t ее декартовы координаты заданы формулами:

$$x = \rho\cos(\varphi + t\omega), \quad y = \rho\sin(\varphi + t\omega), \quad z = z.$$

Следовательно, поле линейных скоростей $\mathbf{v}$ этого движения имеет координаты $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$. По формуле (1) находим:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 2\omega\mathbf{k}.$$

Таким образом, в данном случае вектор $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ направлен по оси вращения, причем его длина 2ω с точностью до коэффициента 2 совпадает с угловой скоростью вращения, а его направление (с учетом ориентации пространства, введенной системой координат) указывает направление вращения.

1.4. Некоторые дифференциальные формулы векторного анализа. Все три оператора grad, div и rot можно записать с помощью только дифференциального оператора Гамильтона

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Действительно, как уже отмечалось, $\operatorname{grad} f = \nabla f$. Далее, используя векторную форму записи оператора ∇, можно сказать, что $\operatorname{div}\mathbf{a}$

равна скалярному произведению вектора ∇ на вектор $\mathbf{a}$, а $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ равен векторному произведению ∇ на $\mathbf{a}$, т.е.

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}), \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Использование оператора ∇ облегчает получение многих дифференциальных формул векторного анализа. Например,

$$\operatorname{grad}(fg) = \nabla(fg) = \nabla(\overset{\downarrow}{f}\, g) + \nabla(f\, \overset{\downarrow}{g}).$$

Здесь стрелка $\downarrow$ над f или g означает, что оператор ∇ действует на f или g соответственно. Далее, каждое слагаемое преобразуем так, чтобы сомножители, не отмеченные стрелкой, оказались слева от ∇. Тогда

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$$

Сформулированное правило обычно не приводит к ошибкам в формулах, линейных относительно оператора ∇. Приведем еще несколько примеров использования этого правила.

Пример 1.

$$\operatorname{div}(f\mathbf{a}) = (\nabla, f\mathbf{a}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{f}\, \mathbf{a}) + (\nabla, f\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \\ = (\mathbf{a}, \nabla f) + f(\nabla, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \operatorname{grad} f) + f\operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Пример 2.

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{a}) = [\nabla, f\mathbf{a}] = [\nabla, \overset{\downarrow}{f}\, \mathbf{a}] + [\nabla, f\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}] = \\ = [\nabla f, \mathbf{a}] + f[\nabla, \mathbf{a}] = f\operatorname{rot}\mathbf{a} - [\mathbf{a}, \operatorname{grad} f].$$

Пример 3.

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\nabla, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ = (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) + (\nabla, \mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) = (\mathbf{b}, \nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) - (\mathbf{a}, \nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) = \\ = (\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]) - (\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b}).$$

Пример 4.

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = [\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]] + [\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]] = \\ = (\mathbf{b}, \nabla)\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} - \mathbf{b}(\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) + \mathbf{a}(\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - (\mathbf{a}, \nabla)\, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} = \\ = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = [\nabla, \nabla f] = \mathbf{0},$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = (\nabla, \nabla, \mathbf{a}) = 0,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = (\nabla, \nabla f).$$

Оператор div grad называется *оператором Лапласа* (или *лапласианом*) и обозначается буквой Δ (дельта). В декартовых координатах

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Равенство $\Delta f = (\nabla, \nabla f)$ указывает, что $\Delta = \nabla^2$.

1.5. Векторные поля и дифференциальные формы в $\mathbb{R}^3$. В области G ориентированного пространства $\mathbb{R}^3$ каждому векторному полю $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$ можно поставить в соответствие дифференциальные формы первого и второго порядка

$$\omega^1_{\mathbf{a}} = a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz,$$
$$\omega^2_{\mathbf{a}} = a_x\,dy\,dz + a_y\,dz\,dy + a_z\,dx\,dy.$$

А каждому скалярному полю f соответствуют дифференциальные формы нулевого и третьего порядка:

$$\omega^0_f = f, \quad \omega^3_f = f\,dx\,dy\,dz.$$

Легко видеть, что

$$\omega^i_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = \omega^i_{\mathbf{a}} + \omega^i_{\mathbf{b}}, \quad \omega^i_{f\mathbf{a}} = f\omega^i_{\mathbf{a}},$$

где $i = 1, 2$. Аналогично, если $i = 0, 3$, то

$$\omega^i_{f+g} = \omega^i_f + \omega^i_g, \quad \omega^i_{gf} = g\omega^i_f.$$

Кроме того, справедливы равенства

$$\omega^1_{\mathbf{a}}\omega^1_{\mathbf{b}} = \omega^2_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}, \quad \omega^1_{\mathbf{a}}\omega^2_{\mathbf{b}} = \omega^3_{(\mathbf{a},\mathbf{b})}.$$

Действительно,

$$\omega^1_{\mathbf{a}}\omega^1_{\mathbf{b}} = (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz)\,(b_x\,dx + b_y\,dy + b_z\,dz) =$$
$$= (a_xb_y - b_xa_y)\,dx\,dy + (a_yb_z - a_zb_y)\,dy\,dz +$$
$$+ (a_zb_x - b_za_x)\,dz\,dx = \omega^2_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}.$$

Аналогично,

$$\omega^1_{\mathbf{a}}\omega^2_{\mathbf{b}} = (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz)\,(b_x\,dy\,dz + b_y\,dz\,dx + b_z\,dx\,dy) =$$
$$= (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)\,dx\,dy\,dz = \omega^3_{(\mathbf{a},\mathbf{b})}.$$

15 Зак. 193

Следующее утверждение показывает, что операция дифференцирования форм порождает операторы grad, rot и div теории поля.

Лемма. $d\omega_f^0 = \omega^1_{\operatorname{grad} f}$, $\quad d\omega^1_{\mathbf{a}} = \omega^2_{\operatorname{rot}\mathbf{a}}$, $\quad d\omega^2_{\mathbf{a}} = \omega^3_{\operatorname{div}\mathbf{a}}$.

Докажем, например, вторую из этих формул:

$$d\omega^1_{\mathbf{a}} = d(a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}dx + \frac{\partial a_x}{\partial y}dy + \frac{\partial a_x}{\partial z}dz\right)dx + \\ + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}dx + \frac{\partial a_y}{\partial y}dy + \frac{\partial a_y}{\partial z}dz\right)dx + \\ + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}dx + \frac{\partial a_z}{\partial y}dy + \frac{\partial a_z}{\partial z}dz\right)dx = \omega^2_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}.$$

Полученные соответствия между операциями над формами и операциями над полями можно использовать для получения некоторых дифференциальных формул векторного анализа.

Например, формула

$$\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b})$$

доказывается следующим образом:

$$\omega^3_{\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = d\omega^2_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = d(\omega^1_{\mathbf{a}}\omega^1_{\mathbf{b}}) = (d\omega^1_{\mathbf{a}})\omega^1_{\mathbf{b}} - \omega^1_{\mathbf{a}}d\omega^1_{\mathbf{b}} = \\ = \omega^2_{\operatorname{rot}\mathbf{a}}\omega^1_{\mathbf{b}} - \omega^1_{\mathbf{a}}\omega^2_{\operatorname{rot}\mathbf{b}} = \omega^3_{(\mathbf{b},\operatorname{rot}\mathbf{a})} - \omega^3_{(\mathbf{a},\operatorname{rot}\mathbf{b})} = \omega^3_{(\mathbf{b},\operatorname{rot}\mathbf{a})-(\mathbf{a},\operatorname{rot}\mathbf{b})}.$$

1.6. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах Пусть диффеоморфизм $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi,\eta,\zeta)$ отображает область D в область G с декартовыми координатами x, y, z. Тогда, как известно, числа ξ, η, ζ называются криволинейными координатами точки (x, y, z), а кривые

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi,\eta_0,\zeta_0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_0,\eta,\zeta_0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_0,\eta_0,\zeta)$$

— координатными линиями, проходящими через точку $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$.

Так как отображение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi,\eta,\zeta)$ является диффеоморфизмом, то в каждой точке области G векторы $\mathbf{r}'_\xi$, $\mathbf{r}'_\eta$, $\mathbf{r}'_\zeta$ линейно независимы, однако они, вообще говоря, не обязаны быть единичными. Пусть

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{1}{|\mathbf{r}'_\xi|}\mathbf{r}'_\xi, \quad \mathbf{e}_\eta = \frac{1}{|\mathbf{r}'_\eta|}\mathbf{r}'_\eta, \quad \mathbf{e}_\zeta = \frac{1}{|\mathbf{r}'_\zeta|}\mathbf{r}'_\zeta. \tag{1}$$

Для любого вектора **a** через a_ξ, a_η, a_ζ обозначим его координаты по базису (1). Тогда

$$\mathbf{a} = a_\xi \mathbf{e}_\xi + a_\eta \mathbf{e}_\eta + a_\zeta \mathbf{e}_\zeta. \tag{2}$$

Как известно, каждому векторному полю $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ ставится в соответствие дифференциальная форма первого порядка

$$\omega^1_{\mathbf{a}} = a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz,$$

где a_x, a_y, a_z — декартовы координаты вектора **a**. Из формулы замены переменных в криволинейном интеграле следует, что

$$\omega^1_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = (\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\xi)\,d\xi + (\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\eta)\,d\eta + (\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\zeta)\,d\zeta.$$

Отсюда, переходя к единичным векторам (1), получаем

$$\omega^1_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\xi)|\mathbf{r}'_\xi|\,d\xi + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\eta)|\mathbf{r}'_\eta|\,d\eta + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\zeta)|\mathbf{r}'_\zeta|\,d\zeta. \tag{3}$$

В дальнейшем для простоты будем рассматривать только ортогональные криволинейные системы координат, т.е. системы координат ξ, η, ζ, у которых векторы (1) ортогональны в любой точке области G. Кроме того, будем предполагать, что системы координат x, y, z и ξ, η, ζ относятся к одному классу ориентации. Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}_\xi) = a_\xi, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\eta) = a_\eta, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\zeta) = a_\zeta,$$

и поэтому равенство (3) принимает вид:

$$\omega^1_{\mathbf{a}} = a_\xi|\mathbf{r}'_\xi|\,d\xi + a_\eta|\mathbf{r}'_\eta|\,d\eta + a_\zeta|\mathbf{r}'_\zeta|\,d\zeta. \tag{4}$$

Выведем формулы для grad, rot и div в криволинейных координатах. Для этого воспользуемся соответствием между векторами и дифференциальными формами.

Таким образом, каждому вектору (2) соответствует дифференциальная форма (4). Легко видеть, что это соответствие взаимно однозначное.

Применим это утверждение для нахождения координат представления $\operatorname{grad} f$ в системе координат ξ, η, ζ. По определению,

$$w^1_{\operatorname{grad} f} = dw^0_f = \frac{\partial f}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,d\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\,d\zeta.$$

Отсюда и из доказанного утверждения следует, что

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{|\mathbf{r}'_\xi|}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}\mathbf{e}_\xi + \frac{1}{|\mathbf{r}'_\eta|}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}\mathbf{e}_\eta + \frac{1}{|\mathbf{r}'_\zeta|}\cdot\frac{\partial f}{\partial \zeta}\mathbf{e}_\zeta.$$

В частности, если ξ, η, ζ — декартовы координаты x, y, z, то

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

Если же ξ, η, ζ — цилиндрические координаты ρ, φ, z: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

Наконец, в сферических координатах ρ, φ, θ:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \\ x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

получаем разложение

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta.$$

Для вывода формулы для rot в криволинейных координатах напомним, что каждому векторному полю $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ ставится в соответствие дифференциальная форма второго порядка

$$\omega^1_{\mathbf{a}} = a_x\,dy\,dz + a_y\,dz\,dx + a_z\,dx\,dy.$$

Из формулы замены переменных в поверхностном интеграле следует, что

$$\omega^1_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\eta, \mathbf{r}'_\zeta)\,d\eta\,d\zeta + (\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\zeta, \mathbf{r}'_\xi)\,d\zeta\,d\xi + (\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\xi, \mathbf{r}'_\eta)\,d\xi\,d\eta. \quad (5)$$

Переходя к единичным векторам (1), получаем:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\eta, \mathbf{r}'_\zeta) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)|\mathbf{r}'_\eta|\cdot|\mathbf{r}'_\zeta|.$$

Если базис (1) ортогональный, то $[\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta] = \mathbf{e}_\xi$, и поэтому

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\eta, \mathbf{r}'_\zeta) = a_\xi|\mathbf{r}'_\eta|\cdot|\mathbf{r}'_\zeta|.$$

Аналогично,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\zeta, \mathbf{r}'_\xi) = a_\eta|\mathbf{r}'_\zeta|\cdot|\mathbf{r}'_\xi|, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{r}'_\xi, \mathbf{r}'_\eta) = a_\zeta|\mathbf{r}'_\xi|\cdot|\mathbf{r}'_\eta|.$$

В результате равенство (5) принимает вид:

$$\omega^2_{\mathbf{a}} = a_\xi|\mathbf{r}'_\eta|\cdot|\mathbf{r}'_\zeta|\,d\eta\,d\zeta + a_\eta|\mathbf{r}'_\zeta|\cdot|\mathbf{r}'_\xi|\,d\zeta\,d\xi + a_\zeta|\mathbf{r}'_\xi|\cdot|\mathbf{r}'_\eta|\,d\xi\,d\eta. \quad (6)$$

Таким образом, каждому вектору (2) соответствует дифференциальная форма (6), и это соответствие взаимно однозначное.

Применим это утверждение для нахождения координат представления $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в системе координат ξ, η, ζ.

Из равенства $\omega^2_{\operatorname{rot}\mathbf{a}} = d\omega^1_{\mathbf{a}}$, применив формулу (4), получаем:

$$\omega^2_{\operatorname{rot}\mathbf{a}} = d(a_\xi|\mathbf{r}'_\xi|\,d\xi + a_\eta|\mathbf{r}'_\eta|\,d\eta + a_\zeta|\mathbf{r}'_\zeta|\,d\zeta) =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\zeta)\mathbf{r}'_\zeta - \frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\eta|\mathbf{r}'_\eta|)\right) d\eta\, d\zeta +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\xi)\mathbf{r}'_\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}(a_\zeta|\mathbf{r}'_\zeta|)\right) d\zeta\, d\xi +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\eta)\mathbf{r}'_\eta - \frac{\partial}{\partial\eta}(a_\xi|\mathbf{r}'_\xi|)\right) d\xi\, d\eta.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{1}{|\mathbf{r}_\eta|\cdot|\mathbf{r}_\zeta|}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\zeta|\mathbf{r}'_\zeta|) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\eta|\mathbf{r}'_\eta|)\right)\mathbf{e}_\xi +$$
$$+ \frac{1}{|\mathbf{r}_\zeta|\cdot|\mathbf{r}_\xi|}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\xi|\mathbf{r}'_\xi|) - \frac{\partial}{\partial\xi}(a_\zeta|\mathbf{r}'_\zeta|)\right)\mathbf{e}_\eta +$$
$$+ \frac{1}{|\mathbf{r}_\xi|\cdot|\mathbf{r}_\eta|}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\eta|\mathbf{r}'_\eta|) - \frac{\partial}{\partial\eta}(a_\xi|\mathbf{r}'_\xi|)\right)\mathbf{e}_\zeta.$$

Отсюда легко получаются разложения $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в цилиндрических и сферических координатах.

Для выражения div в криволинейных координатах воспользуемся формулой замены переменных в ориентированном кратном интеграле. Из нее следует, что

$$\omega^3_f = f\,dx\,dy\,dz = f\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = f\cdot(\mathbf{r}'_\xi, \mathbf{r}'_\eta, \mathbf{r}'_\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

В частности, если базис (1) ортогональный и задает ту же ориентацию пространства, что и декартов базис $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, то

$$\omega^3_f = f\cdot|\mathbf{r}'_\xi|\cdot|\mathbf{r}'_\eta|\cdot|\mathbf{r}'_\zeta|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{7}$$

Применим это утверждение для вывода выражения для $\operatorname{div}\mathbf{a}$ в системе координат ξ, η, ζ.

Из равенства $\omega^3_{\operatorname{div}\mathbf{a}} = d\omega^2_{\mathbf{a}}$ и формулы (6) следует, что

$$\omega^3_{\operatorname{div}\mathbf{a}} =$$
$$= d\left(a_\xi|\mathbf{r}'_\eta|\cdot|\mathbf{r}'_\zeta|\,d\eta\,d\zeta + a_\eta|\mathbf{r}'_\zeta|\cdot|\mathbf{r}'_\xi|\,d\zeta\,d\xi + a_\zeta|\mathbf{r}'_\xi|\cdot|\mathbf{r}'_\eta|\,d\xi\,d\eta\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\xi|\mathbf{r}'_\eta|\cdot|\mathbf{r}'_\zeta|) + \frac{\partial}{\partial\eta}(a_\eta|\mathbf{r}'_\zeta|\cdot|\mathbf{r}'_\xi|) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\zeta|\mathbf{r}'_\xi|\cdot|\mathbf{r}'_\eta|)\right) d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

На основании формулы (7) заключаем, что

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{|\mathbf{r}'_\xi|\cdot|\mathbf{r}'_\eta|\cdot|\mathbf{r}'_\zeta|}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\xi|\mathbf{r}'_\eta|\cdot|\mathbf{r}'_\zeta|)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\eta|\mathbf{r}'_\zeta|\cdot|\mathbf{r}'_\xi|)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\zeta|\mathbf{r}'_\xi|\cdot|\mathbf{r}'_\eta|)\right). \quad (8)$$

В частности в декартовых, цилиндрических и сферических координатах имеем:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho)+\frac{\partial}{\partial\varphi}a_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}(a_z\rho)\right) =$$
$$= \frac{1}{\rho^2\cos\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2\cos\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\varphi\rho)+\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\rho\cos\theta)\right).$$

Таким образом, в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}a_\rho+\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

а в сферических координатах:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{2}{\rho}a_\rho+\frac{1}{\rho\cos\varphi}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}-\frac{\operatorname{tg}\theta}{\rho}a_\theta.$$

§ 2. Интегральные формулы теории поля

2.1. Формула Ньютона–Лейбница. Пусть в области G пространства (или плоскости) заданы непрерывно дифференцируемая функция f и некоторый путь γ, т.е. гладкая или кусочно-гладкая параметрически заданная кривая $\gamma = \{\mathbf{r}(t),\ t\in[a;b]\}$. Тогда, как известно, справедлива формула

$$f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = \int_\gamma(\operatorname{grad} f, d\mathbf{r}), \quad (1)$$

которую, как и в одномерном случае, тоже будем называть формулой Ньютона–Лейбница. Здесь кривая γ ориентирована параметром t: от точки A с радиус-вектором $\mathbf{r}(a)$, до точки B с радиус-вектором $\mathbf{r}(b)$.

Чтобы не вводить дополнительных обозначений, формулу (1) иногда записывают в виде

$$f(B) - f(A) = \int\limits_{A\gamma B} (\operatorname{grad} f, d\gamma). \tag{2}$$

Отсюда следует, что работа поля $\operatorname{grad} f$ вдоль пути γ зависит только от начала и конца этого пути. Более того, эта работа зависит не столько от начала и конца пути, сколько от того, на каких поверхностях уровня функции f лежат эти точки.

Напомним, что в формулах (1) и (2) $d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{l}\, ds$, где ds — элемент длины дуги кривой γ, а $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором скорости движения вдоль γ. Так как интеграл (2) не зависит от пути интегрирования, то формулу (2) записывают еще и так:

$$\int\limits_A^B (\operatorname{grad} f, d\mathbf{s}) = f(B) - f(A),$$

где $d\mathbf{s} = \boldsymbol{l}\, ds$ — векторный элемент длины кривой.

2.2. Формула Стокса. Пусть в некоторой области ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ заданы векторное поле $\mathbf{a}$ и ориентированная поверхность S, ориентация (или сторона) которой определена единичным вектором нормали $\mathbf{n}$. Тогда интеграл по поверхности S от скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ называется *потоком векторного поля* $\mathbf{a}$ *через поверхность* S *в направлении нормали* $\mathbf{n}$ и обозначается

$$\iint\limits_S (\mathbf{a}, d\mathbf{S}).$$

В этом обозначении $d\mathbf{S}$ называется *векторным элементом площади поверхности* и, по определению, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$, где dS — элемент площади поверхности S.

Используя понятия ротора векторного поля и потока вектора через поверхность, формулу Стокса можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_{\partial S} (\mathbf{a}, d\mathbf{s}) = \iint\limits_S (\operatorname{rot} \mathbf{a}, d\mathbf{S}), \tag{1}$$

где, как обычно ∂S — край поверхности S, ориентация которого согласована с ориентацией поверхности S.

Формула(1)означает, что если ориентации поверхности S и ее границы ∂S согласованы, то *циркуляция векторного поля* **a** *по границе поверхности* S *равна потоку ротора вектора* **a** *через поверхность* S. Она позволяет выяснить *геометрический смысл ротора* векторного поля.

Заметим, что циркуляция векторного поля может служить характеристикой завихренности этого поля в окрестности рассматриваемой точки. А чтобы описать эту завихренность, необходимо подсчитать циркуляцию по контурам, лежащим в трех различных плоскостях.

Пусть $S_\delta(M;\boldsymbol{l})$ — круг радиуса δ с центром в точке M, плоскость которого перпендикулярна единичному вектору $\boldsymbol{l}$. Тогда, согласно формуле (1),

$$\int\limits_{\partial S_\delta(M;\boldsymbol{l})} (\mathbf{a}, d\mathbf{s}) = \iint\limits_{S_\delta(M;\boldsymbol{l})} (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \boldsymbol{l})\, dS.$$

При условии, что векторное поле **a** непрерывно дифференцируемо, отсюда следует, что

$$\exists\, \widetilde{M} \in S_\delta(M;\boldsymbol{l}) : (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \boldsymbol{l})|_{\widetilde{M}} \pi\delta^2 = \int\limits_{\partial S_\delta(M;\boldsymbol{l})} (\mathbf{a}, d\mathbf{s}),$$

и поэтому в точке M

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \boldsymbol{l}) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{\partial S_\delta(M;\boldsymbol{l})} (\mathbf{a}, d\mathbf{s}). \tag{2}$$

Очевидно, правая часть формулы (2) может быть принята за определение проекции $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на вектор $\boldsymbol{l}$, что позволяет дать новое определение ротора (для этого достаточно рассмотреть его проекции на три некомпланарных вектора).

Отметим, что правая часть формулы (2) зависит от ориентации пространства, так как направление вектора $\boldsymbol{l}$ и обход контура $\partial S_\delta(M;\boldsymbol{l})$ должны быть согласованы. А при фиксированной ориентации пространства она не зависит от выбора системы координат. Следовательно, *ротор векторного поля не зависит от выбора системы координат, если ориентация пространства не меняется, однако если ориентация пространства меняется, то ротор меняет направление на противоположное.*

2.3. Формула Остроградского–Гаусса. Пусть граница ∂G ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$ состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Тогда, если функции P, Q, R непрерывно

дифференцируемы в G и непрерывны на замкнутой области $\overline{G}$, то, как известно, справедлива формула Остроградского–Гаусса:

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\partial G} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS, \quad (1)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{n}$ внешней нормали к ∂G.

Через $\mathbf{a}$ обозначим векторное поле с координатами P, Q, R. Тогда формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV = \iint\limits_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\,dS, \quad (2)$$

где dV — элемент объема, а dS — элемент площади поверхности ∂G. Используя понятие векторного элемента площади поверхности, формулу (2) можно записать еще и так:

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV = \iint\limits_{\partial G} (\mathbf{a}, d\mathbf{S}), \quad (3)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне границы области G.

Формулы (2) и (3) означают, что *интеграл от дивергенции векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *по некоторой области равен потоку вектора* $\mathbf{a}$ *через границу этой области.*

В частности, они позволяют выяснить физический смысл дивергенции векторного поля.

Пусть векторное поле $\mathbf{a}(M)$ непрерывно дифференцируемо в области G. Через $O_\delta(M)$ обозначим, как обычно, δ-окрестность точки $M \in G$, т.е. шар радиуса $\delta > 0$ с центром в точке M, а через $S_\delta(M)$ — границу этого шара. Так как множество G открыто, то $\overline{O_\delta}(M) \subset G$ при любом достаточно малом $\delta > 0$, и поэтому

$$\iiint\limits_{O_\delta(M)} \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV = \iint\limits_{S_\delta(M)} (\mathbf{a}, d\mathbf{S}).$$

Согласно теореме о среднем,

$$\exists\, \widetilde{M} \in O_\delta(M) : \iiint\limits_{O_\delta(M)} \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV = mO_\delta(M)\operatorname{div}\mathbf{a}(\widetilde{M}),$$

где $mO_\delta(M)$ — объем шара $O_\delta(M)$.

14 Зак. 193

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{mO_\delta(M)} \iint\limits_{S_\delta(M)} (\mathbf{a}, d\mathbf{S}). \qquad (4)$$

Пусть векторное поле $\mathbf{a}$ — это поле скоростей течения жидкости или газа. В силу закона сохранения, поток вектора $\mathbf{a}$ через границу области может возникнуть только из-за того, что в этой области есть источники или стоки. Тогда формула (4) означает, что $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ — это *плотность источников и стоков в точке* $M \in G$.

Таким образом, дивергенцию векторного поля a можно интерпретировать как плотность распределения источников и стоков этого поля в рассматриваемой области.

Пример. Рассмотрим в пространстве электрическое поле, которое создает заряд величины q, помещенный в начало координат. По закону Кулона напряженность этого поля задается формулой

$$\mathbf{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$ — радиус-вектор точки M, а ε_0 — размерная константа, зависящая от выбора системы физических единиц.

Векторное поле $\mathbf{E}(M)$ определено всюду, кроме начала координат. Легко вычисляется, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ в любой точке области определения. Следовательно, если область G не содержит начала координат, то по формуле (3) поток вектора $\vec{E}$ через ее границу ∂G равен нулю.

Подсчитаем поток вектора $\mathbf{E}$ через границу области G, содержащей начало координат.

Через S_δ обозначим сферу радиуса $\delta > 0$ с центром в начале координат, и будем считать, что δ настолько мало, что замкнутый шар $|\mathbf{r}| \leqslant \delta$ содержится в G. Далее, через G_δ обозначим область, которая получается вычитанием шара $|\mathbf{r}| \leqslant \delta$ из области G. Очевидно, граница области G_δ состоит из ∂G и сферы S_δ. По формуле (2) имеем:

$$\iint\limits_{\partial G} (\mathbf{E}, \mathbf{n})\, dS + \iint\limits_{S_\delta} (\mathbf{E}, \mathbf{n})\, dS = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G_δ. А так как на S_δ $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, то

$$\iint\limits_{\partial G} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \iint\limits_{S_\delta} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^4}\, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\delta^2} \iint_{S_\delta} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Аналогично доказывается, что если в точках $M_1, \ldots, M_N$ области G помещены электрические заряды $q_1, \ldots, q_N$, то

$$\iint_{\partial G} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j.$$

Следовательно, поток напряженности электрического поля через поверхность тела равен (с точностью до коэффициента) сумме электрических зарядов, содержащихся в этом теле.

2.4. Соленоидальные векторные поля. Как обычно, начнем с определения.

Определение 1. Непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a}(M), M \in G$, называется *соленоидальным в области* G, если

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0 \quad \forall M \in G. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\mathbf{a}(M), M \in G$, *было соленоидальным в области* G, *необходимо и достаточно, чтобы для любой замкнутой области* $\overline{g} \subset G$ *с кусочно-гладкой границей выполнялось условие:*

$$\iint_{\partial g} (\mathbf{a}, d\mathbf{S}) = 0, \tag{2}$$

т.е. поток вектора $\mathbf{a}$ *через* ∂g *равен нулю.*

Необходимость условия (2) для соленоидального векторного поля $\mathbf{a}(M)$ следует из формулы Остроградского–Гаусса, а достаточность — из геометрического определения дивергенции.

Так как $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ можно интерпретировать как плотность источников векторного поля $\mathbf{a}(M), M \in G$, то векторное поле, удовлетворяющее условию (1), называют еще *свободным от источников* (или *векторным полем без источников и стоков*).

Определение 2. Непрерывно дифференцируемая векторная функция $\mathbf{b}(M), M \in G$, называется *векторным потенциалом векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ в области G, если

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{rot} \mathbf{b}(M) \quad \forall M \in G. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\mathbf{a}$ *в области* G *имеет векторный потенциал, то оно является соленоидальным в* G. *Кроме того, поток вектора* $\mathbf{a}$ *через любую ориентированную замкнутую кусочно-гладкую поверхность* $S \subset G$ *равен нулю.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что, как легко подсчитать, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{b} = 0$. Докажем второе утверждение.

Пусть поверхность S кусочно-гладкой кривой γ разбивается на два гладких куска S_1 и S_2. Через γ^+ обозначим кривую γ, ориентированную соответственно внешней стороне поверхности S_1, а через γ^- — кривую γ с противоположной ориентацией. Тогда, если $\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{b}$, то

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\mathbf{n})\,dS = \iint\limits_{S_1} (\operatorname{rot}\mathbf{b},\mathbf{n})\,dS + \iint\limits_{S_2} (\operatorname{rot}\mathbf{b},\mathbf{n})\,dS =$$

$$= \int\limits_{\gamma^+} (\mathbf{b}, d\mathbf{r}) + \int\limits_{\gamma^-} (\mathbf{b}, d\mathbf{r}) = 0.$$

Теорема 2 доказана.

Отметим, что в этой теореме область, для которой поверхность S является границей, может не принадлежать области G.

Теорема 3. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\mathbf{a}(M)$, *в области* G *удовлетворяет условию соленоидальности* (1), *то у любой точки в области* G *существует окрестность, в которой это поле имеет векторный потенциал.*

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$. Через $P(M_0)$ обозначим открытую клетку, которая содержится в области G и является окрестностью точки M_0. Докажем, что векторное поле $\mathbf{a}(M)$ в $P(M_0)$ имеет векторный потенциал. Для этого достаточно найти хотя бы один вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий векторному уравнению (3), т.е. следующим трем скалярным уравнениям:

$$a_x = \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}, \quad a_y = \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}, \quad a_z = \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}. \qquad (4)$$

Положим $b_z = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (4) находим:

$$a_x = -\frac{\partial b_y}{\partial z}, \quad b_y = -\int\limits_{z_0}^{z} a_x(x,y,t)\,dt + \varphi(x,y)$$

$$a_y = \frac{\partial b_x}{\partial z}, \quad b_x = \int\limits_{z_0}^{z} a_y(x,y,t)\,dt,$$

где $\varphi(x,y)$ — некоторая функция от x, y, а (x,y,z) — координаты точки $M \in P(M_0)$.

Найдем функцию $\varphi(x, y)$. Для этого подставим найденные выражения для b_x и b_y в третье уравнение системы (4):

$$a_z = -\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \right) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

и заметим, что, в силу условия соленоидальности (1),

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = -\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

и поэтому

$$a_z = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_z}{\partial t}\, dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_z(x, y, z_0), \quad \varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} a_z(t, y, z_0)\, dt. \tag{7}$$

Очевидно, вектор $\mathbf{b}$, у которого $b_z = 0$, а координаты b_x и b_y находятся по формулам (5), (6), (7), удовлетворяет условию (3). Теорема 3 доказана.

Заметим, что векторный потенциал определен с точностью до потенциального вектора, так как $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$.

Теорема 3 утверждает, что любое соленоидальное векторное поле локально имеет векторный потенциал. Следующий пример показывает, что во всей области G соленоидальное векторное поле может не иметь векторного потенциала.

Пример. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Это поле определено и непрерывно дифференцируемо всюду вне начала координат. Кроме того,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0,$$

если $r \neq 0$.

Пусть S_ρ — сфера радиуса ρ с центром в начале координат. Тогда

$$\iint_{S_\rho} (\mathbf{a}, d\mathbf{S}) = -\iint_{S_\rho} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dS = -4\pi.$$

Отсюда, согласно теореме 2, следует, что данное векторное поле в области, содержащей начало координат, не имеет векторного потенциала.

В заключение заметим, что *любое непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\mathbf{a}$ *в области* $G \subset \mathbb{R}^3$ *является суммой двух векторных полей: потенциального и соленоидального.*

Действительно, пусть непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a}$ уже представлено в виде суммы

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{b}$ такое, что $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$. Тогда функция u должна удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \mathbf{a}$$

или, что то же самое, уравнению

$$\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}. \tag{8}$$

Оно называется *уравнением Пуассона*. Его решения будут изучаться в курсе «Уравнения математической физики».

Для завершения доказательства сформулированного утверждения, которое называется *теоремой Гельмгольца*, осталось заметить, что если решение уравнения Пуассона (8) найдено, то

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - \operatorname{grad} u.$$

§ 3. Некоторые уравнения математической физики

3.1. Уравнение теплопроводности. Пусть область G пространства $\mathbb{R}^3$ заполнена некоторым веществом с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ и удельной теплоемкостью $c = c(x, y, z)$. Через $T = T(x, y, z, t)$ обозначим температуру вещества в точке $(x, y, z) \in G$ в момент времени t. В результате теплообмена температурное поле T может как-то меняться. Покажем, что это изменение подчинено определенному закону, и получим его выражение в виде некоторого уравнения.

Пусть D — некоторая ограниченная подобласть области G с кусочно-гладкой границей S. Если в D нет ни источников, ни стоков тепла, то изменение внутренней энергии вещества, содержащегося в D, может происходить только путем переноса энергии через границу S. В силу закона сохранения энергии, в этом случае изменение внутренней энергии в области D равно потоку энергии через поверхность S. Получим нужное соотношение в предположении, что все рассматриваемые функции непрерывны и имеют непрерывные производные первого и даже второго порядка по соответствующим переменным.

Для подсчета изменения энергии заметим, что для увеличения на ΔT температуры однородного вещества объема ΔV требуется

тепловая энергия в количестве $c\rho\Delta V \cdot \Delta T$. Следовательно, за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ внутренняя энергия рассматриваемого вещества в области D изменяется на величину

$$\iiint\limits_D c\rho\Delta T\, dV,$$

где $\Delta T = T(x, y, z, t + \Delta t) - T(x, y, z, t)$.

Известно, что тепловая энергия переходит от более нагретых частей тела к менее нагретым. Это означает, что в каждой точке вектор потока этой энергии сонаправлен вектору $-\operatorname{grad} T$. Более того, при обычных температурных режимах скорость потока энергии пропорциональна этому вектору. Как известно, коэффициент k этой пропорциональности называется *коэффициентом теплопроводности* данного вещества в рассматриваемой точке. Следовательно, за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ через границу S области D в сторону внешней нормали $\mathbf{n}$ пройдет энергия, величина которой равна

$$-\int\limits_t^{t+\Delta t} dt \iint\limits_S k(\operatorname{grad} T, \mathbf{n})\, dS.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\iiint\limits_D c\rho\Delta T\, dV = \int\limits_t^{t+\Delta t} dt \iint\limits_S k(\operatorname{grad} T, \mathbf{n})\, dS. \qquad (1)$$

Поверхностный интеграл в (1) преобразуем по формуле Остроградского–Гаусса и заметим, что

$$\Delta T = \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt.$$

В результате получим равенство

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} dt \iiint\limits_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV = \int\limits_t^{t+\Delta t} dt \iiint\limits_D \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)\, dV. \qquad (2)$$

Так как оно выполняется для любых t и Δt и любой области $D \subset G$, то в каждой точке $(x, y, z) \in G$ в любой момент времени t температура T удовлетворяет уравнению

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T). \qquad (3)$$

Отметим, что здесь операторы div и grad берутся только по пространственным переменным и, следовательно,

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Уравнение (3) называется *однородным уравнением теплопроводности*. В случае, когда в области G имеются источники и стоки тепла, вместо равенства (2) получим равенство

$$\int_t^{t+\Delta t} dt \iiint_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} dt \iiint_D \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)\, dV + \int_t^{t+\Delta t} dt \iiint_D q\, dV,$$

где $q = q(x, y, z, t)$ — плотность интенсивности источников и стоков тепла. Из него следует *неоднородное уравнение теплопроводности*:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + q. \tag{4}$$

Если вещество, заполняющее область G, является однородным, то коэффициент k можно считать не зависящим от x, y, z. В этом случае уравнение (4) обычно записывают в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f, \tag{5}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f = \dfrac{q}{c\rho}$, а Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным, т.е.

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

В случае, когда температурное поле T в области G не зависит от времени t, т.е. когда режим теплообмена в G установился, уравнение (5) превращается в *уравнение Пуассона*:

$$\Delta T = g,$$

где $g = -\dfrac{1}{a^2} f$. Если, кроме того, в области G нет ни источников, ни стоков тепла, то получаем уравнение Лапласа $\Delta T = 0$.

3.2. Уравнение неразрывности. Пусть область G пространства $\mathbb{R}^3$ заполнена некоторым веществом, которое в момент времени t имеет плотность $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Через $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ обозначим поле скоростей движения этого вещества (например, жидкости) в области G в момент времени t и найдем связь между ρ и $\mathbf{v}$. Как и выше, будем предполагать, что все рассматриваемые функции непрерывны и имеют непрерывные производные.

Пусть D — некоторая ограниченная подобласть области G с кусочно-гладкой границей S. За промежуток времени от t до $t+\Delta t$ количество вещества в области D изменяется на величину

$$\iiint\limits_D \Delta\rho\, dV,$$

где $\Delta\rho = \rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)$. С другой стороны, за этот промежуток времени поток вещества через границу S области D в сторону внешней нормали $\mathbf{n}$ равен

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} dt \iint\limits_S \rho \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{n})\, dS.$$

В силу закона сохранения количества вещества, если в области D нет ни источников, ни стоков вещества, то

$$\iiint\limits_D \Delta\rho\, dV = -\int\limits_t^{t+\Delta t} dt \iint\limits_S \rho \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{n})\, dS.$$

Поверхностный интеграл преобразуем по формуле Остроградского–Гаусса и заметим, что

$$\Delta\rho = \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dt.$$

В результате получим равенство

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} dt \iiint\limits_D \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV = -\int\limits_t^{t+\Delta t} dt \iiint\limits_D \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\, dV.$$

А так как оно выполняется для любых t и Δt и любой области $D \subset G$, то в каждой точке $(x, y, z) \in G$ в любой момент времени t справедливо соотношение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}).$$

Оно называется *уравнением неразрывности* сплошной среды.

С помощью оператора ∇ уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\nabla,\rho\mathbf{v})=0.$$

А поскольку $(\nabla,\rho\mathbf{v})=(\mathbf{v},\nabla\rho)+\rho(\nabla,\mathbf{v})$, то его также можно записать в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathbf{v},\operatorname{grad}\rho)+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0.$$

Вещество, заполняющее область G, может быть сжимаемым и несжимаемым. Большинство жидкостей являются несжимаемыми. Очевидно, если в области G нет ни источников, ни стоков вещества, и это вещество несжимаемо, то в любой момент времени объемный поток вещества через границу S любой области D равен нулю, т.е.

$$\iint\limits_S(\mathbf{v},\mathbf{n})\,dS=0.$$

Отсюда по формуле Остроградского–Гаусса следует, что

$$\iiint\limits_D\operatorname{div}\mathbf{v}\,dV=0$$

для любой области $D\subset G$ с кусочно-гладкой границей, и поэтому для несжимаемого вещества $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$. Следовательно, для несжимаемой среды переменной плотности уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla\rho)=0.$$

3.3. Основные уравнения динамики сплошной среды. Пусть, как и ранее, область $G\subset\mathbb{R}^3$ заполнена некоторым веществом с плотностью $\rho=\rho(x,y,z,t)$. Через $\mathbf{v}=\mathbf{v}(x,y,z,t)$ обозначим поле скоростей движения этого вещества, а через $p=p(x,y,z,t)$ — давление в точке (x,y,z) в момент времени t.

Выделим некоторую ограниченную область $D\subset G$ с кусочно-гладкой границей S и рассмотрим силы, действующие на вещество в D в момент времени t.

На каждый элемент массы вещества действуют так называемые *массовые силы*. К ним относятся внешние массовые силы (например, сила тяжести) и сила инерции. Пусть $\mathbf{F}(x,y,z,t)$ — векторное поле внешних массовых сил, а $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z,t)$ — ускорение частицы вещества, которая в момент времени t находится

в точке (x, y, z). Тогда на вещество, содержащееся в области D, действуют две массовые силы: внешняя сила, равная интегралу

$$\iiint\limits_D \mathbf{F}\rho\, dV, \tag{1}$$

и сила инерции, которая согласно второму закону Ньютона равна

$$-\iiint\limits_D \mathbf{a}\rho\, dV. \tag{2}$$

Кроме того, на вещество, содержащееся в области D с границей S, действует поверхностная сила, вызванная давлением на поверхность S. Она на S задает векторное поле $-p\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S. Поэтому она равна

$$-\iint\limits_S p\mathbf{n}\, dS. \tag{3}$$

Заметим, что для простоты мы считаем, что давление p в точке по всем направлениям одинаково. Такие вещества называют идеальной жидкостью, если оно несжимаемо, или идеальным газом, если оно сжимаемо.

Преобразуем по формуле Остроградского–Гаусса каждую компоненту вектора (3). Тогда

$$\iint\limits_S pn_x\, dS = \iint\limits_S p\, dy\, dz = \iiint\limits_D \frac{\partial p}{\partial x}\, dV,$$

$$\iint\limits_S pn_y\, dS = \iint\limits_S p\, dz\, dx = \iiint\limits_D \frac{\partial p}{\partial y}\, dV,$$

$$\iint\limits_S pn_z\, dS = \iint\limits_S p\, dx\, dy = \iiint\limits_D \frac{\partial p}{\partial z}\, dV,$$

Следовательно,

$$-\iint\limits_S p\mathbf{n}\, dS = -\iiint\limits_D \operatorname{grad} p\, dV. \tag{4}$$

Согласно принципу Даламбера в каждый момент времени сумма сил (1), (2) и (3) равна нулю. Отсюда, учитывая равенство (4), следует, что

$$\iiint\limits_D (\mathbf{F}\rho - \mathbf{a}\rho - \operatorname{grad} p)\, dV = 0$$

для любой области $D \subset G$ с кусочно-гладкой границей. Поэтому если все функции $\mathbf{F}$, ρ, $\mathbf{a}$ и $\operatorname{grad} p$ непрерывны в G, то они удовлетворяют уравнению

$$\rho\mathbf{a} = \rho\mathbf{F} - \operatorname{grad} p, \tag{5}$$

которое напоминает уравнение Ньютона движения материальной точки.

По определению, $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$. Если считать, что частица вещества, находящаяся в момент времени t в точке (x, y, z), движется по закону $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt},$$

или, что то же самое,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z},$$

где v_x, v_y, v_z — координаты вектора $\mathbf{v}$. Таким образом,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v},$$

и поэтому уравнение движения (5) принимает вид:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{6}$$

Уравнение (6) называется *гидродинамическим уравнением Эйлера*. Оно равносильно системе трех скалярных уравнений и содержит пять неизвестных скалярных функций: функции p и ρ и три компоненты вектора $\mathbf{v}$. Для описания движения идеальной сплошной среды к нему нужно добавить уравнение неразрывности и некоторую информацию о физических свойствах движущегося вещества.

Глава 14
РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Ортогональные системы и ряды Фурье

1.1. Периодические функции и гармонический анализ. На практике часто встречаются явления и процессы, описываемые периодическими функциями. Простейшей периодической функцией является *синусоида*

$$y = A\sin(\omega t + \alpha), \tag{1}$$

где A, ω и α — некоторые числа, называемые соответственно *амплитудой, частотой* и *начальной фазой синусоиды* (1). Очевидно, сумма любого числа синусоид одной частоты ω является синусоидой той же частоты ω. Если же сложить несколько синусоид вида

$$y_k = A_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

то получим периодическую функцию с периодом $T = 2\pi/\omega$, которая существенно отличается от синусоиды. Возникает вопрос: можно ли наперед заданную периодическую функцию периода T представить в виде суммы конечного или бесконечного числа синусоид вида (2)? Ниже будет показано, что для достаточно широкого класса функций на этот вопрос можно дать утвердительный ответ. Именно, будет доказано, что любую такую функцию $\varphi(t)$ можно разложить в ряд вида

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \tag{3}$$

где частота ω находится по формуле $\omega = 2\pi/T$.

В механике и физике движение, которое описывается синусоидой вида (1), называется *гармоническим колебанием*. Поэтому говорят, что сложное колебание $\varphi(t)$ разлагается на отдельные гармонические колебания, и каждую синусоиду, входящую в разложение (3), называют *гармоникой* (соответственно *первой*, *второй* и т.д.) *функции* $\varphi(t)$. А сам процесс разложения периодической функции на гармоники называется *гармоническим анализом*.

По формуле для синуса суммы ряд (3) преобразуется в ряд

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t,$$

где $a_0 = A_0$, $a_k = A_k \sin\alpha_k$, $b_k = A_k \cos\alpha_k$. Наконец, сделав замену $\omega t = x$, приходим к стандартному тригонометрическому ряду

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{4}$$

и соответственно к задаче разложения периодической функции с периодом $T = 2\pi$ в тригонометрический ряд вида (4). В этой главе в основном будем изучать условия, при выполнении которых данную периодическую функцию можно разложить в ряд по простым гармоникам, т.е. в ряд вида (4).

Система функций 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ..., называемая *тригонометрической*, является простейшим примером так называемых *ортогональных систем*. В дальнейшем всюду, где не возникают дополнительные сложности, вместо рядов по тригонометрической системе будем рассматривать ряды по произвольным ортогональным системам функций.

1.2. Ортогональные и ортонормированные системы функций. Пусть задана система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{1}$$

области определения которых имеют непустое пересечение. Тогда любой функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{2}$$

где a_n — некоторые числа, называется *рядом по системе функций* (1), а числа a_n — *коэффициентами ряда* (2). Например, степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

является рядом по системе функций 1, x, x^2, ...

Говорят, что *функция $f(x)$ разложена в ряд по системе функций* (1), если указаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такие, что ряд (2) в любой точке области определения функции f сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f. \tag{3}$$

Особый интерес представляют ряды по так называемым ортогональным системам функций. Дадим соответствующие определения.

Определение 1. Любые две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на промежутке Δ, называются *ортогональными на* Δ, если их произведение интегрируемо на Δ (в собственном или несобственном смысле) и

$$\int\limits_{\Delta} \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Очевидно, функция, тождественно равная нулю на промежутке Δ, ортогональна на Δ любой функции, определенной на Δ.

Пример 1. Покажем, что многочлен n-й степени

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

на отрезке $[-1;1]$ ортогонален любому многочлену меньшей степени.

Заметим, что достаточно рассмотреть лишь многочлены 1, x, $x^2, \ldots, x^k$, где $k < n$. Для $k = 0$ имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Если же $k > 0$, то по формуле интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k Q_n(x)\,dx = x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-k\int\limits_{-1}^{1} x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx.$$

Легко видеть, что здесь внеинтегральные члены равны нулю. После k интегрирований по частям получим равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k Q_n(x)\,dx = (-1)^k k!\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n\,dx.$$

А так как $n - k \geqslant 1$, то последний интеграл равен нулю, что и доказывает наше утверждение.

Отметим, что многочлены

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

называются *многочленами Лежандра.*

Определение 2. Система функций, определенных на промежутке Δ, называется *ортогональной на* Δ, если любые две функции этой системы ортогональны на Δ.

Из утверждения, доказанного в примере 1, следует, что *система многочленов Лежандра ортогональна на отрезке* $[-1; 1]$.

Пример 2. Рассмотрим систему функций

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots. \tag{5}$$

Все ее элементы, кроме первого, являются тригонометрическими функциями, поэтому она называется *тригонометрической системой.*

Очевидно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

т.е. первая функция ортогональна любой другой функции системы (5). Далее, так как

$$2 \sin nx \cos mx = \sin (n + m)x + \sin (n - m)x \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

то и любые две функции $\sin nx$ и $\cos mx$ ортогональны на $(-\pi; \pi)$. Наконец, из тождеств

$$2 \cos nx \cos mx = \cos (n + m)x + \cos (n - m)x,$$

$$2 \sin nx \sin mx = \cos (n - m)x - \cos (n + m)x$$

следует, что если $n \neq m$, то как функции $\cos nx$ и $\cos mx$, так и функции $\sin nx$ и $\sin mx$ ортогональны на $(-\pi; \pi)$.

Таким образом, тригонометрическая система (5) ортогональна на интервале $(-\pi, \pi)$. А так как все функции этой системы периодические с периодом 2π, то справедливо следующее утверждение:

Тригонометрическая система (5) *ортогональна на любом промежутке длины* 2π.

Обобщением системы (5) является система функций

$$1, \cos \frac{\pi}{l}x, \sin \frac{\pi}{l}x, \ldots, \cos n\frac{\pi}{l}x, \sin n\frac{\pi}{l}x, \ldots,$$

где $l > 0$, которую тоже будем называть *тригонометрической системой.* Очевидно, она ортогональна на любом промежутке длины $2l$. (Доказать это утверржрдение в качестве упражнения.)

Определение 3. Система функций (1), определенных на промежутке Δ, называется *ортонормированной на* Δ, если она ортогональна на Δ и

$$\int_{\Delta} |\varphi_n(x)|^2\, dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Условие (6) называется *условием нормировки.*

Лемма. *Система функций*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots \tag{7}$$

ортонормирована на любом промежутке длины 2π.

Доказательство. Ортогональность системы (7) следует из ортогональности тригонометрической системы (5). А условие нормировки следует из того, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi.$$

Лемма доказана.

Аналогично доказывается, что *система функций*

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}x,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}x,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos n\frac{\pi}{l}x,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin n\frac{\pi}{l}x,\ \ldots \tag{8}$$

ортонормирована на любом промежутке длины $2l$.

Системы функций (7) и (8) будем называть *нормированными тригонометрическими системами.*

1.3. Ряды Фурье по ортогональным системам функций. Пусть функция $f(x)$, $x \in \Delta$, разложена в ряд по системе функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{1}$$

ортогональной на промежутке Δ:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \tag{2}$$

Найдем формулы для определения коэффициентов этого ряда. Для этого обе части равенства (2) умножим на $\varphi_k(x)$ и проинтегрируем по промежутку Δ, предполагая, что полученный ряд можно интегрировать почленно. В результате получим равенство

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\varphi_k(x)\,dx = a_k \int\limits_{\Delta} |\varphi_k(x)|^2\,dx,$$

так как интегралы от произведений $\varphi_n(x)\varphi_k(x)$ при $n \neq k$ равны нулю (в силу ортогональности системы (1)).

Предположим еще, что ортогональную систему (1) можно нормировать, т.е. что

$$\int\limits_{\Delta} |\varphi_n(x)|^2\,dx \neq 0 \quad \forall n.$$

Тогда для коэффициентов a_n ряда (2) получим формулу

$$a_n = \frac{1}{\int\limits_{\Delta} |\varphi_n(x)|^2\,dx} \int\limits_{\Delta} f(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Определение 1. Числа a_n, определяемые по формулам (3), называются *коэффициентами Фурье функции f по ортогональной системе* (1), а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \tag{4}$$

называется *рядом Фурье функции f* по этой системе.

Заметим, что если задана ортогональная система (1), то для любой функции f, для которой имеют смысл формулы (3), можно написать ряд Фурье по этой системе. Однако он не обязан сходиться к функции f. В некоторых (или во всех) точках промежутка Δ он может даже расходиться. В общем случае будем писать

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x).$$

Возникают вопросы:

1. Когда ряд Фурье функции f сходится в заданной точке? Когда он сходится равномерно?
2. Когда он сходится к $f(x)$? Когда он сходится к $f(x)$ равномерно?
3. Какова скорость сходимости ряда Фурье функции f?
4. Какими свойствами должна обладать ортогональная система, чтобы любую достаточно хорошую функцию можно было разложить в ряд Фурье по этой системе?

И т. д.

Мы не будем изучать эти вопросы в общем виде. В этой главе мы рассмотрим только так называемые *тригонометрические ряды Фурье*, т.е. ряды Фурье по тригонометрическим системам.

Наиболее общим классом функций, для которых будем рассматривать тригонометрические ряды Фурье, является класс функций, которые интегрируемы в смысле определения несобственных интегралов для функций многих переменных (см. § 4 гл. 11). Напомним соответствующие определения.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$, $x \in G$, такая, что для нее существует хотя бы одно допустимое исчерпание множества G. Тогда эта функция называется *интегрируемой на G в несобственном смысле*, если для любого допустимого исчерпания $\{G_k\}$ множества G числовая последовательность

$$\int f\, dG_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

имеет конечный предел, и этот предел не зависит от выбора допустимого исчерпания множества G. Этот предел называется *интегралом от функции f по множеству G*.

Доказывается, что функция f интегрируема на G (в смысле этого определения) тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно допустимое для f исчерпание $\{G\}$ множества G, для которого последовательность

$$\int |f|\, dG_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

имеет конечный предел.

Таким образом, если функция f интегрируема на G в смысле данного определения, то функция $|f|$ тоже интегрируема на G. Поэтому такие функции называют *абсолютно интегрируемыми* и обычно определяют следующим образом:

Функция f называется *абсолютно интегрируемой на множестве G*, если существует допустимое для f исчерпание множества G и интеграл от $|f|$ по G сходится.

Множество всех абсолютно интегрируемых на множестве G функций будем обозначать $L_1^R(G)$. Здесь буква R означает, что множества G_k измеримы по Жордану и функция f интегрируема по Риману на G_k. В тех случаях, когда это несущественно, вместо $L_1^R(G)$ будем писать $L_1(G)$ или даже просто L_1.

По аналогии с $L_1^R(G)$ определяется класс функций $L_p^R(G)$, где $p \geqslant 1$. А именно, по определению, $f \in L_p^R(G)$, если существует допустимое для f исчерпание множества G и интеграл от $|f|^p$ по G сходится.

Для произвольных ортогональных систем наиболее естественным классом функций является класс $L_2(\Delta)$, так как любая функция $\varphi_n(x)$ этой системы должна быть хотя бы такой, чтобы интеграл от $|\varphi_n(x)|^2$ сходился.

Из очевидного неравенства

$$2|f(x)| \cdot |\varphi_n(x)| \leqslant |f(x)|^2 + |\varphi_n(x)|^2$$

следует, что если $f \in L_2(\Delta)$ и $\varphi_n \in L_2(\Delta)$, то произведение $f\varphi_n$ абсолютно интегрируемо на Δ, и поэтому имеет смысл говорить о коэффициентах Фурье функции $f \in L_2(\Delta)$.

Замечание. Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках промежутка Δ, кроме точек множества $\gamma \subset \Delta$ меры нуль. Тогда, если она абсолютно интегрируема на множестве $\Delta \backslash \gamma$, то обычно говорят, что она абсолютно интегрируема на Δ, так как при любом ее доопределении на γ она будет абсолютно интегрируемой на Δ, и значение интеграла не зависит от способа доопределения. Аналогичное соглашение принято и для функций из $L_p(\Delta)$, $p \geqslant 1$.

§ 2. Тригонометрические ряды Фурье

2.1. Определения и примеры. Для любой функции f, определенной и абсолютно интегрируемой на конечном интервале $(a; b)$, определены коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, ортогональной на интервале $(a; b)$:

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x, \ldots, \cos n\frac{\pi}{l}x,\ \sin n\frac{\pi}{l}x, \ldots, \tag{1}$$

где $l = (b-a)/2$. Соответствующий ряд Фурье обычно записывают в следующем виде:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}x + b_n \sin n\frac{\pi}{l}x. \tag{2}$$

Из общей формулы для коэффициентов Фурье (см. п. 1.2) следует, что коэффициенты a_0, a_n, b_n ряда (2) вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx, \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx, \tag{5}$$

Числа a_0, a_n, b_n, определяемые по формулам (3), (4), (5), называются *коэффициентами Фурье функции f по тригонометрической системе (1)*. Чтобы показать, что это — коэффициенты Фурье именно функции f, будем иногда писать $a_0(f)$, $a_n(f)$, $b_n(f)$.

Пример 1. Найдем ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$, по тригонометрической системе, ортогональной на интервале $(-1;1)$.

Здесь $l = 1$, и, следовательно, ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x. \tag{6}$$

Найдем коэффициенты a_0, a_n, b_n.

Из формул (3) и (4) при $a = -1$, $b = 1$ следует, что $a_0 = 0$ и $a_n = 0$ $\forall n$, так как данная функция является нечетной. Далее, согласно формуле (5),

$$b_n = \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \cdot \sin n\pi x\,dx = 2\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right),$$

и, следовательно, $b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = \dfrac{4}{(2k+1)\pi}$.

Таким образом,

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\pi x.$$

Пример 2. Найдем ряд Фурье функции $f(x) = x$, $x \in (0;1)$, по тригонометрической системе, ортогональной на интервале $(0;1)$.

Здесь $l = 1/2$, и, следовательно, ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x.$$

По формулам (3), (4), (5) находим

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1,$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\,dx = 2x\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}\,dx = 0,$$

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx = -2x\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos 2n\pi x}{n\pi}\,dx = -\frac{1}{n\pi}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\sin 2n\pi x.$$

Пример 3. Найдем ряд Фурье функции $f(x) = |x|$, $x \in (-1;1)$, по тригонометрической системе, ортогональной на интервале $(-1;1)$.

Здесь $l = 1$, и, следовательно, ряд Фурье имеет вид (6). По формулам (3) и (4) находим

$$a_0 = \int_{-1}^1 |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1,$$

$$a_n = \int_{-1}^1 |x|\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx =$$

$$= 2x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{2}{(n\pi)^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Следовательно, $a_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = -\dfrac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$. Из формулы (5) следует, что $b_n = 0$, так как данная функция четная. Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi x.$$

Заметим, что сумма тригонометрического ряда (2) является периодической с периодом $2l$. Поэтому ряды Фурье по тригонометрической системе (1) естественно рассматривать тоже для $2l$-периодических функций. В дальнейшем через $\overset{*}{L}{}_1^R(-l;l)$ обозначим класс $2l$-периодических функций, абсолютно интегрируемых на интервале $(-l;l)$.

В формулах (3), (4), (5) промежуток $(a;b)$, по которому происходит интегрирование, фиксирован, так как, вообще говоря, только на нем задана функция f. Если же функция $2l$-периодическая, то интегрирование можно производить по любому промежутку длины $2l$. Следовательно, если $f \in \overset{*}{L}{}_1^R(-l;l)$, то

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos n\frac{\pi}{l}x\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin n\frac{\pi}{l}x\,dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

для любого $a \in \mathbb{R}$. При $a = -l$ эти формулы имеют вид

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos n\frac{\pi}{l}x\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin n\frac{\pi}{l}x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частности, если функция $f \in L_1^R(-l;l)$ четная, то

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx, \quad n = 1, 2\ldots$$

и $b_n = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а если f нечетная, то $a_0 = a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Тригонометрическая система (1), тригонометрический ряд (2) и формулы для коэффициентов Фурье наиболее простой вид имеют в случае, когда $l = \pi$. Действительно, если $f(x) \in L_1^R(-\pi;\pi)$, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Так как общий случай заменой $\xi = \dfrac{\pi}{l}x$ сводится к тригонометрической системе, ортогональной на интервале $(-\pi;\pi)$, то в дальнейшем будем изучать в основном только ряды по тригонометрической системе

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots,$$

которую будем называть *стандартной тригонометрической системой.*

Пример 4. Найдем ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\pi; \pi)$ по стандартной тригонометрической системе.

Данная функция f нечетная, поэтому

$$a_0 = 0 \text{ и } a_n = 0 \quad \forall\, n,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin nx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right),$$

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k-1} = \frac{4}{(2k-1)\pi} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x.$$

2.2. Комплексная форма тригонометрических рядов Фурье. Вместо тригонометрической системы

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x, \ldots, \cos n\frac{\pi}{l}x,\ \sin n\frac{\pi}{l}x, \ldots, \tag{1}$$

ортогональной на интервале $(-l; l)$, часто рассматривают систему комплекснозначных функций

$$\varphi_\nu(x) = e^{i\nu\frac{\pi}{l}x}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел. Ее тоже называют *тригонометрической*, так как

$$e^{i\nu\frac{\pi}{l}x} = \cos\nu\frac{\pi}{l}x + i\sin\nu\frac{\pi}{l}x.$$

Определение 1. Комплекснозначные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными на промежутке* Δ, если они определены на Δ и

$$\int\limits_{\Delta} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = 0.$$

Очевидно, *система функций* (2) *ортогональна на интервале* $(-l; l)$. Кроме того,

$$\int\limits_{-l}^{l} |\varphi_\nu(x)|^2\,dx = \int\limits_{-l}^{l} \varphi_\nu(x)\overline{\varphi_\nu}(x)\,dx = 2l.$$

17 Зак. 193

Определение 2. Для любой функции $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-l;l)$ числа

$$c_\nu = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\nu\frac{\pi}{l}x}\,dx, \quad \nu = 0, \pm1, \pm2, \dots, \tag{3}$$

называются *коэффициентами Фурье функции f по ортогональной системе* (2).

Чтобы показать, что c_ν — это коэффициенты Фурье именно функции f, иногда будем писать $c_\nu(f)$.

Так как

$$c_\nu = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\nu\frac{\pi}{l}x - i\sin\nu\frac{\pi}{l}x\right)dx,$$

то $c_0 = a_0/2$ и

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где a_0, a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе (1).

Определение 3. Выражение

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x}, \tag{5}$$

где $c_\nu = c_\nu(f)$, называется *рядом Фурье функции f по системе* (2), а сумма

$$\mathrm{T}_n(f;x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x} \tag{6}$$

△

называется *n-й частичной суммой* этого ряда.

Как обычно, ряд (5) называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм (6) сходится. Предел этой последовательности называется *суммой ряда* (5).

Если ряд (5) является рядом Фурье функции $f(x)$, то будем писать

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x}.$$

Из формул (4) следует, что

$$\mathrm{T}_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\frac{\pi}{l}x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\frac{\pi}{l}x} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k \sin k\frac{\pi}{l}x.$$

Таким образом, $\mathrm{T}_n(f;x)$ — это n-я частичная сумма ряда Фурье функции f по тригонометрической системе (1).

Мы, как уже говорилось, в основном будем рассматривать случай, когда $l = \pi$ и функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π. В этом случае

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x},$$

где

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\nu x}\, dx, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Как и выше, тригонометрическую систему $e^{i\nu x}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, будем называть *стандартной тригонометрической системой в комплексной форме.*

2.3. Интегральное представление частичных сумм тригонометрических рядов Фурье. Ядро Дирихле. Рассмотрим n-ю частичную сумму ряда Фурье функции $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ по тригонометрической системе, ортогональной на интервале $(-\pi;\pi)$. Как показано в предыдущем пункте,

$$\mathrm{T}_n(f;x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x},$$

где

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-i\nu\xi}\, d\xi.$$

Следовательно,

$$\mathrm{T}_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu(x-\xi)}\, d\xi.$$

Определение. Функция $\mathrm{D}_n(x) = \sum\limits_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu x}$ называется *ядром Дирихле порядка n*.

Очевидно,

$$\mathrm{D}_n(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{D}_n(x)$ — четная 2π-периодическая функция, $\mathrm{D}_n(0) = 1 + 2n$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{D}_n(x)\,dx = 1.$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии получаем, что

$$\mathrm{D}_n(x) = \frac{e^{-inx} - e^{inx+ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

для любого $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

С помощью ядра Дирихле n-я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ выражается следующим образом:

$$\mathrm{T}_n(f; x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\mathrm{D}_n(\xi - x)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\xi + x)\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi.$$

А так как подынтегральная функция является 2π-периодической, то

$$\mathrm{T}_n(f; x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \xi)\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, в силу четности ядра Дирихле, следует, что

$$\mathrm{T}_n(f; x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x - \xi) + f(x + \xi)\right)\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi.$$

Кроме указанных выше свойств, ядра Дирихле обладают еще одним важным свойством.

Лемма. *Существует постоянная C такая, что*

$$\left|\int\limits_{\xi}^{\eta} \mathrm{D}_n(x)\,dx\right| \leqslant 2\pi \cdot C \quad \forall \xi, \eta \in (0;\pi), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} \mathrm{D}_n(x)\,dx = \int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\frac{\sin\lambda_n x}{x}\,dx,$$

где $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$, $\varphi(x) = \dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}}$. Легко доказывается, что функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает на интервале $(0;\pi)$. Поэтому, согласно второй теореме о среднем, существует $\theta \in [\xi;\eta]$ такое, что

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} \mathrm{D}_n(x)\,dx = \varphi(\xi)\int\limits_{\xi}^{\theta} \frac{\sin\lambda_n x}{x}\,dx + \varphi(\eta)\int\limits_{\theta}^{\eta} \frac{\sin\lambda_n x}{x}\,dx. \tag{2}$$

А так как для любых a, b и λ

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = \int\limits_{a\lambda}^{b\lambda} \frac{\sin t}{t}\,dt, \tag{3}$$

и интеграл от функции $\dfrac{\sin t}{t}$ на $\mathbb{R}$ сходится, то интеграл (3) ограничен, т.е. существует постоянная C такая, что

$$\left|\int\limits_{a}^{b} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx\right| \leqslant C$$

для любых a, b из $\mathbb{R}$. Отсюда и из равенства (2) следует неравенство (1). Лемма доказана.

Доказанное свойство называют свойством равномерной ограниченности интегралов от ядер Дирихле.

§ 3. Теорема Римана об осцилляции и ее следствия

3.1. Теорема об аппроксимации абсолютно интегрируемых функций ступенчатыми функциями. Прежде всего введем некоторые понятия, которые широко используются в математике.

Определение 1. Для любой функции f замыкание множества точек $x \in D_f$, в которых $f(x) \neq 0$, называется *носителем функции* f и обозначается $\operatorname{supp} f$.

Определение 2. Функция, определенная на $\mathbb{R}$, называется *финитной*, если ее носитель ограничен, т.е. если она равна нулю вне некоторого отрезка.

Определение 3. Функция, определенная на некотором промежутке Δ, называется *ступенчатой*, если существует разбиение промежутка Δ на конечное число промежутков, на каждом из которых она постоянна.

Теорема. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ такая, что $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{\Delta}$ и*

$$\int_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{1}$$

(Здесь $\overline{\Delta}$ обозначает, как обычно, замыкание множества Δ.)

Доказательство. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$ и построим финитную ступенчатую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую неравенству (1).

Из определения абсолютной интегрируемости функции f на промежутке Δ следует, что существует ограниченное измеримое множество $g_\varepsilon \subset \Delta$, на котором функция f интегрируема по Риману, причем

$$\int_{\Delta} |f(x)|\, dx - \int_{g_\varepsilon} |f(x)|\, dx = \int_{\Delta \setminus g_\varepsilon} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Через $f_\varepsilon(x)$ обозначим функцию, равную $f(x)$ на g_ε и нулю вне g_ε. Очевидно,

$$\int_{\Delta} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\Delta \setminus g_\varepsilon} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Функция $f_\varepsilon(x)$ равна нулю вне ограниченного множества $g_\varepsilon \subset \Delta$, поэтому ее носитель содержится в некотором отрезке $[a; b] \subset \overline{\Delta}$. На этом отрезке она интегрируема по Риману, так как она

интегрируема по Риману на g_ε и на $[a;b]\backslash g_\varepsilon$. Поэтому существует разбиение τ отрезка $[a;b]$ на промежутки $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ такое, что

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx - s(f_\varepsilon;\tau) < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $s(f_\varepsilon;\tau)$ — нижняя сумма Дарбу функции f_ε, т.е.

$$s(f_\varepsilon;\tau) = \sum_{j=1}^{N} m_j |\Delta_j|,$$

где $m_j = \inf\limits_{x\in\Delta_j} f_\varepsilon(x)$. Через $\varphi(x)$ обозначим ступенчатую функцию, которая равна m_j на Δ_j, $j = 1, \ldots, N$, и нулю вне $[a;b]$. Очевидно, $\varphi(x) \leqslant f_\varepsilon(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Delta \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx = s(f_\varepsilon;\tau),$$

и, следовательно,

$$\int_\Delta |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|\,dx = \int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx - s(f_\varepsilon;\tau) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) следует, что финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенству (1). Действительно,

$$\int_\Delta |f(x) - \varphi(x)|\,dx \leqslant \int_\Delta |f(x) - f_\varepsilon|(x)\,dx +$$

$$+ \int_\Delta |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Заметим, что в этой теореме промежуток Δ может быть как конечным, так и бесконечным. В частности, возможен и случай, когда $\Delta = (-\infty; +\infty)$.

С л е д с т в и е. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то функция*

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dt, \text{ где } a \in \Delta,$$

непрерывна на замыкании $\overline{\Delta}$ этого промежутка.

Доказательство. Согласно доказанной теореме, для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая, что

$$\int\limits_\Delta |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Легко видеть, что функция

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int\limits_a^x \varphi_\varepsilon(t)\,dt$$

непрерывна на $\overline{\Delta}$ и такая, что $|F(x) - \Phi_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in \overline{\Delta}$. Следовательно, для любых x и x_0 из $\overline{\Delta}$

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant |F(x) - \Phi_\varepsilon(x)| + |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)| + \\ + |\Phi_\varepsilon(x_0) - F(x_0)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)|.$$

А так как функция $\Phi_\varepsilon(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\exists\delta > 0:\ \forall x \in O_\delta(x_0) \cap \overline{\Delta} \quad |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и поэтому

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in O_\delta(x_0) \cap \overline{\Delta}.$$

Следствие доказано.

3.2. Теорема Римана и ее обобщение. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном промежутке Δ.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_\Delta f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Для характеристической функции любого конечного промежутка это утверждение очевидно. Действительно, если ξ и η — концы промежутка, то

$$\left|\int\limits_\xi^\eta e^{i\lambda x}\,dx\right| = \left|\frac{e^{i\lambda\eta} - e^{i\lambda\xi}}{i\lambda}\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|}.$$

А так как любая финитная ступенчатая функция есть линейная комбинация характеристических функций конечного числа конечных промежутков, то утверждение теоремы верно для любой такой функции.

Согласно теореме из предыдущего пункта, для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{\Delta} f(x)e^{i\lambda x}\, dx\right| \leqslant \int\limits_{\Delta} |f(x) - \varphi(x)|\, dx + \left|\int\limits_{\Delta} \varphi(x)e^{i\lambda x}\, dx\right|. \tag{3}$$

Последний интеграл, согласно уже доказанному, стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, поэтому

$$\exists\, \lambda_\varepsilon : \quad \forall\, \lambda, |\lambda| > \lambda_\varepsilon : \quad \left|\int\limits_{\Delta} \varphi(x)e^{i\lambda x}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Следовательно, (см. (2), (3), (4))

$$\left|\int\limits_{\Delta} f(x)e^{i\lambda x}\, dx\right| < \varepsilon \quad \forall\, \lambda, \quad |\lambda| > \lambda_\varepsilon,$$

что и доказывает равенство (1). Теорема доказана.

Отметим, что здесь параметр λ (см. (1)) может принимать любое значение из $\mathbb{R}$ и, в частности, может стремиться как к $+\infty$, так и к $-\infty$. Следовательно, наряду с (1) выполняется и равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_a^b f(x)e^{-i\lambda x}\, dx = 0. \tag{5}$$

С л е д с т в и е. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{\Delta} f(x)\cos\lambda x\, dx = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{\Delta} f(x)\sin\lambda x\, dx = 0. \tag{7}$$

16 Зак. 193

Действительно, так как

$$\cos\lambda x = \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}\right), \quad \sin\lambda x = \frac{1}{2i}\left(e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}\right),$$

то равенства (6) и (7) следуют из (1) и (5).

Доказанная теорема и следствие содержат, по существу, одно и то же утверждение. Оно называется *теоремой* (или *леммой*) *Римана об осцилляции.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{\alpha,\beta}\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| = 0, \tag{8}$$

где супремум берется по всем интервалам $(\alpha;\beta)\subset\Delta$.

Доказательство. Пусть сначала Δ — конечный промежуток с концами a и b. Тогда, согласно следствию из предыдущего пункта, функция

$$F(\xi) = \int\limits_a^{\xi} |f(x)|\,dx$$

непрерывна на отрезке $[a;b]$. А так как она равномерно непрерывна на $[a;b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых ξ и $\xi + \Delta\xi$ из $[a;b]$

$$|F(\xi+\Delta\xi) - F(\xi)| < \varepsilon,$$

если $|\Delta\xi| < \delta$. Для этого $\delta > 0$ выберем какое-то целое n, удовлетворяющее неравенству $b - a < n\delta$, и рассмотрим точки

$$\xi_j = a + \frac{b-a}{n}j, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\int\limits_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} |f(x)|\,dx < \varepsilon \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Согласно теореме 1,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{\xi_j}^{\xi_k} f(x)e^{i\lambda x}\,dx = 0$$

для любых k и j, равных $0, 1, \ldots, n$. А так как таких интегралов конечное число, то

$$\exists\,\lambda_\varepsilon: \quad \forall\,\lambda, |\lambda| > \lambda_\varepsilon \quad \left|\int\limits_{\xi_j}^{\xi_k} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < \varepsilon$$

для любых $k, j = 0, 1, \ldots, n$. Легко видеть, что для любых α и β из $[a; b]$ существуют ξ_j и ξ_k такие, что $\alpha \in [\xi_{j-1}, \xi_j]$, $\beta \in [\xi_k; \xi_{k+1}]$. Поэтому

$$\forall\,\lambda > \lambda_\varepsilon \quad \left|\int\limits_\alpha^\beta f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqslant \int\limits_\alpha^{\xi_j} |f(x)|\,dx + \int\limits_{\xi_k}^\beta |f(x)|\,dx + \left|\int\limits_{\xi_j}^{\xi_k} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < 3\varepsilon \quad \forall\,\alpha, \beta \in [a; b].$$

Случай конечного промежутка рассмотрен.

Пусть теперь $\Delta = [a; +\infty)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует b_ε такое, что

$$\int\limits_{b_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Тогда если $b_\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \beta$, то

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqslant \int\limits_\alpha^\beta |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Если же $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b_\varepsilon$, то, как уже доказано, существует λ_ε такое, что

$$\forall\,\lambda, |\lambda| > \lambda_\varepsilon \quad \left|\int\limits_\alpha^\beta f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < 3\varepsilon$$

для любого интервала $(\alpha; \beta) \subset (a; b_\varepsilon)$. Наконец, если $a \leqslant \alpha < b_\varepsilon < \beta$, то

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_\alpha^{b_\varepsilon} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| + \int\limits_{b_\varepsilon}^\beta |f(x)|\,dx,$$

и поэтому

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < 3\varepsilon + \varepsilon \quad \forall\,\lambda, |\lambda| > \lambda_\varepsilon.$$

Таким образом, если $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$, то

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < 4\varepsilon \quad \forall\,(\alpha;\beta) \subset [a;+\infty).$$

Случай промежутка $\Delta = [a;+\infty)$ рассмотрен. Другие бесконечные промежутки рассматриваются аналогично. Теорема 2 доказана.

Эту теорему будем называть *теоремой Римана о равномерной осцилляции.*

3.3. Стремление к нулю коэффициентов Фурье по тригонометрической системе. Пусть $a_n(f)$, $b_n(f)$ — n-е коэффициенты Фурье функции $f(x)$, $x \in \Delta$, по тригонометрической системе, ортогональной на промежутке Δ, а $c_\nu(f)$ — ν-й коэффициент Фурье этой функции по соответствующей тригонометрической системе в комплексной форме.

Теорема 1. *Коэффициенты Фурье $c_\nu(f)$ любой абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $\nu \to \pm\infty$, т.е.*

$$\lim_{\nu\to\infty} c_\nu(f) = 0. \tag{1}$$

Действительно, если функция f абсолютно интегрируема на $\Delta = (a;a+2l)$, то

$$c_\nu(f) = \frac{1}{l}\int_\Delta f(x)e^{-i\nu\frac{\pi}{l}x}\,dx,$$

и поэтому равенство (1) следует из теоремы Римана об осцилляции.

Как следствие, из (1) получаем

$$\lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0.$$

Изучим влияние дифференциальных свойств функции на порядок убывания ее коэффициентов Фурье. Для простоты будем рассматривать лишь случай $\Delta = (-\pi;\pi)$.

Прежде всего заметим, что если функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна и $f(-\pi) = f(\pi)$, а на интервале $(-\pi;\pi)$ имеет непрерывную и абсолютно интегрируемую производную $f'(x)$, то

$$c_\nu(f) = \frac{1}{\nu i}c_\nu(f') \quad \forall\,\nu \neq 0. \tag{2}$$

Действительно, формула (2) получается из формулы

$$c_\nu(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\nu x}\,dx \tag{3}$$

интегрированием по частям.

Для дальнейшего нам потребуется одно простое утверждение.

Лемма 1. *Если на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ и интеграл от $f'(x)$ по $(a; b)$ сходится, то функция $f(x)$ имеет конечные пределы при $x \to a+0$ и при $x \to b-0$ и справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b-0) - f(a+0). \tag{4}$$

Действительно, для любых ξ и η из интервала $(a; b)$ справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_\xi^\eta f'(x)\,dx = f(\eta) - f(\xi).$$

Отсюда при $\xi \to a+0$ и $\eta \to b-0$ следует, что односторонние пределы $f(b-0)$ и $f(a+0)$ существуют, являются конечными, и справедлива формула (4). Ее будем называть *обобщенной формулой Ньютона–Лейбница.*

Лемма 2. *Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на интервалах $(x_{j-1}; x_j)$, где $j = 1, 2, \ldots, N$ и $x_0 = -\pi$, $x_N = \pi$, имеет непрерывную производную $f'(x)$. Тогда, если $f'(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\pi; \pi)$, то*

$$c_\nu(f) = \frac{1}{\nu i}c_\nu(f') + \frac{1}{2\pi\nu i}\sum_{j=1}^{N}[f]_{x_j}e^{-i\nu x_j}, \tag{5}$$

где $[f]_{x_j}$ — скачок функции f в точке x_j, т.е.

$$[f]_{x_j} = f(x_j+0) - f(x_j-0).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в точках x_j функция f может быть разрывной, но, согласно лемме 1, она в любой точке x_j имеет односторонние пределы, и поэтому можно

говорить о скачке функции f в точке x_j. Тогда равенство (5) получается из (3) интегрированием по частям с помощью обобщенной формулы Ньютона–Лейбница. Действительно,

$$c_\nu(f) = \frac{1}{\nu i}c_\nu(f') - \frac{1}{2\pi\nu i}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left(f(x)e^{-i\nu x}\right)'\,dx =$$

$$= \frac{1}{\nu i}c_\nu(f') - \frac{1}{2\pi\nu i}\sum_{j=1}^{N}\left(f(x_j-0) - f(x_{j-1}+0)\right)e^{-i\nu x_j}.$$

Здесь в точках $x_0 = -\pi$ и $x_N = \pi$ мы воспользовались периодичностью функции f. Лемма 2 доказана.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, на интервале $(a;b)$ имеет *кусочно-непрерывную производную*, если интервал $(a;b)$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых она имеет непрерывную производную.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$, $x \in (-\pi;\pi)$, на интервале $(-\pi;\pi)$ имеет кусочно-непрерывную и абсолютно интегрируемую производную, то*

$$c_\nu(f) = O\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \text{при } \nu \to \pm\infty. \tag{6}$$

Если, кроме того, $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то справедлива формула (2) и, в частности,

$$c_\nu(f) = o\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \text{при } \nu \to \pm\infty. \tag{7}$$

Доказательство. Функцию f продолжим на $\mathbb{R}$ периодически с периодом 2π. Тогда асимптотическое равенство (6) следует из формулы (5), а равенство (7) — из формулы (2) и равенства (1). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть функция f на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна, и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда, если $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$ имеет кусочно-непрерывную и абсолютно интегрируемую производную 2-го порядка, то*

$$c_\nu(f) = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \quad \text{при } \nu \to \pm\infty.$$

Действительно, для $c_\nu(f)$ справедливо равенство (2), а $f'(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы, поэтому

$$c_\nu(f) = \frac{1}{\nu i}c_\nu(f') = \frac{1}{\nu i}O\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \quad \text{при} \quad \nu \to \pm\infty.$$

Следствие 2. *Пусть 2π-периодическая функция f на $\mathbb{R}$ имеет непрерывную производную k-го порядка $f^{(k)}(x)$. Тогда, если k-я производная на интервале $(-\pi;\ \pi)$ имеет кусочно-непрерывную и абсолютно интегрируемую производную, то*

$$c_\nu(f) = \frac{1}{(i\nu)^{k+1}} c_\nu\left(f^{(k+1)}\right) \quad \forall\, \nu \neq 0.$$

Если, кроме того, $(k+1)$-я производная на $(-\pi;\pi)$ имеет кусочно-непрерывную и абсолютно интегрируемую производную, то

$$c_\nu(f) = O\left(\frac{1}{\nu^{k+2}}\right) \text{ при } \nu \to \pm\infty.$$

3.4. Принцип локализации для тригонометрических рядов Фурье. Напомним, что для n-й частичной суммы $\mathrm{T}_n(f;x)$ ряда Фурье функции $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ по тригонометрической системе справедлива формула

$$\mathrm{T}_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x-\xi) + f(x+\xi)\right) \mathrm{D}_n(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

где $\mathrm{D}_n(\xi)$ — ядро Дирихле порядка n, т.е.

$$\mathrm{D}_n(\xi) = \frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})\xi}{\sin\frac{\xi}{2}}.$$

Зафиксируем некоторое $x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим функцию

$$\psi(x,\xi) = \frac{f(x-\xi) + f(x+\xi)}{\sin\frac{\xi}{2}}, \quad \xi \in (0;\pi). \tag{2}$$

Так как функция f абсолютно интегрируема на любом промежутке длины 2π, то при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ функции $f(x-\xi)$ и $f(x+\xi)$ по ξ абсолютно интегрируемы на интервале $(0;\pi)$. Следовательно, функция (2) абсолютно интегрируема на любом интервале $(\delta;\pi)$, у которого $\delta > 0$. Поэтому, согласно теореме Римана об осцилляции, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi \psi(x,\xi) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\, d\xi = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \delta \in (0;\pi),$$

из которого следует одно интересное свойство тригонометрических рядов.

Теорема. *Если* $\mathrm{T}_n(f;x)$ — *n-я частичная сумма ряда Фурье функции* $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$, *а* $\mathrm{D}_n(\xi)$ — *ядро Дирихле порядка* n, *то для любого* $x \in \mathbb{R}$ *и любого* $\delta \in (0;\pi)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n(f;x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{f(x-\xi)+f(x+\xi)}{2} \mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi,$$

которое следует понимать так: если существует один из пределов, то существует и другой, и они равны.

Таким образом, сходимость ряда Фурье функции f и величина его суммы зависят только от свойств и значений функции f в окрестности точки x_0. Это свойство тригонометрических рядов Фурье называется *принципом локализации.*

§ 4. Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье

4.1. Признак Липшица. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Говорят, что она в этой точке удовлетворяет *условию Липшица порядка* $\alpha > 0$, если существует постоянная C и $\delta > 0$ такие, что

$$|f(x_0+\xi) - f(x_0)| \leqslant C|\xi|^\alpha \quad \forall \xi \in (-\delta;\delta). \tag{1}$$

Теорема 1. *Если функция* $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ *в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* $\alpha > 0$, *то ее ряд Фурье в точке* x_0 *сходится к* $f(x_0)$.

Доказательство. Напомним, что для n-й частичной суммы ряда Фурье функции f справедлива формула

$$\mathrm{T}_n(f;x_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+\xi)\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi,$$

где

$$\mathrm{D}_n(\xi) = \frac{\sin\lambda_n\xi}{\sin\frac{\xi}{2}}, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi = 1, \quad \lambda_n = n + \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\mathrm{T}_n(f;x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x_0+\xi) - f(x_0))\,\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi.$$

По условию функция f в точке x_0 удовлетворяет условию Липшица (1). Не ограничивая общности, можно считать, что $\delta < \pi$. Тогда функция

$$F(\xi) = \frac{f(x_0+\xi) - f(x_0)}{\sin\frac{\xi}{2}}$$

удовлетворяет неравенству

$$|F(\xi)| \leqslant \frac{C|\xi|^\alpha}{\left|\sin\frac{\xi}{2}\right|} \quad \forall \xi \in (-\delta; \delta).$$

А так как функция $\sin\frac{\xi}{2}$ выпукла вверх на отрезке $[0;\pi]$, то

$$\sin\frac{\xi}{2} \geqslant \frac{\xi}{\pi} \quad \forall \xi \in [0;\pi],$$

и поэтому

$$|F(\xi)| \leqslant \pi C |\xi|^{\alpha-1} \quad \forall \xi \in [0;\pi].$$

Следовательно,

$$|\mathrm{T}_n(f;x_0) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}C\int_{-h}^{h}|\xi|^{\alpha-1}d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{-h}F(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{h}^{\pi}F(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \quad (2)$$

для любого $h \in (0;\delta)$ и любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $h \in (0;\delta)$ функция $F(\xi)$ абсолютно интегрируема на интервалах $(-\pi;-h)$ и $(h;\pi)$. Согласно теореме Римана об осцилляции, интегралы по этим интервалам стремятся к нулю при $n \to \infty$. Поэтому из (2) следует неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{T}_n(f;x_0) - f(x_0)| \leqslant C\cdot\frac{1}{\alpha}h^\alpha.$$

А так как оно справедливо для любого $h \in (0;\delta)$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{T}_n(f;x_0) - f(x_0)| = 0.$$

Очевидно, если верхний предел неотрицательной последовательности равен нулю, то эта последовательность сходится и ее предел равен нулю. Теорема 1 доказана.

Эта теорема называется *признаком Липшица сходимости ряда Фурье в точке.*

Лемма 1. *Если функция f в точке x_0 дифференцируема, то в этой точке она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$.*

Доказательство. Пусть $f'(x_0) = a$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$a - 1 < \frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{\xi} < a + 1$$

для любого $\xi \neq 0$ из интервала $(-\delta; \delta)$. Будем считать, что $C = \max\{|a - 1|, |a + 1|\}$, отсюда получим

$$|f(x_0 + \xi) - f(x_0)| \leqslant C|\xi| \quad \forall \xi \in (-\delta; \delta).$$

Лемма 1 доказана.

Аналогично доказывается и следующее утверждение.

Лемма 2. *Если функция f в точке x_0 непрерывна и имеет односторонние производные $f'_\pm(x_0)$, то в этой точке она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$.*

Следствие 1. *Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi; \pi)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ дифференцируема или непрерывна и имеет конечные односторонние производные, то в этой точке ее ряд Фурье сходится к $f(x_0)$.*

Следствие 2. *Если функция $f(x)$, $x \in [a; b]$, $a < b$, на интервале $(a; b)$ непрерывна, абсолютно интегрируема и в каждой точке $x \in (a; b)$ дифференцируема или имеет конечные односторонние производные, то в любой точке $x \in (a; b)$ ее ряд Фурье сходится и*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}x + b_n \sin n\frac{\pi}{l}x,$$

где $l = \dfrac{b - a}{2}$, $a_0 = a_0(f)$, $a_n = a_n(f)$, $b_n = b_n(f)$. Если, кроме того, функция f непрерывна на $[a; b]$, $f(a) = f(b)$ и существуют конечные односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$, то и в точках $x = a$, $x = b$ ряд Фурье сходится к $f(x)$.

Доказательство. Первое утверждение уже доказано. Докажем второе.

Так как $f(a) = f(b)$, то данную функцию с отрезка $[a; b]$ можно продолжить периодически с периодом $T = b - a$ на всю прямую $\mathbb{R}$. Очевидно, что продолженная функция в любой точке $x \in \mathbb{R}$ непрерывна и имеет конечные односторонние пределы, и поэтому в любой точке $x \in \mathbb{R}$ ее ряд Фурье сходится к $f(x)$. Следствие 2 доказано.

Рассмотрим примеры, разобранные в пункте 1.3.

Пример 1. Ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$ получен в п. 1.3. Следовательно,

$$\operatorname{sgn} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\pi x \quad \forall x \in (-1; 1).$$

Действительно, в точке $x = 0$ это равенство очевидно, а в любой точке $x \neq 0$ функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1; 1)$, дифференцируема.

Пример 2. Функция $f(x) = x$, $x \in (0; 1)$, дифференцируема на интервале $(0; 1)$. Следовательно, (см. п. 1.3):

$$x = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin 2n\pi x \quad \forall x \in (0; 1).$$

Пример 3. Ряд Фурье функции $f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$ получен в п. 1.3. Она удовлетворяет всем условиям следствия 2, а именно, второй его части, поэтому

$$|x| = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi x$$

для любого $x \in [-1; 1]$.

Пример 4. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\pi; \pi)$, аналогична функции из примера 1, поэтому (см. п. 1.3)

$$\operatorname{sgn} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x \quad \forall x \in (-\pi; \pi).$$

Для разрывной функции, имеющей односторонние пределы в некоторой точке, естественно рассматривать так называемые *односторонние условия Липшица.*

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в правой (левой) окрестности точки x_0 и имеет предел $f(x_0+0)$ (соответственно $f(x_0 - 0)$). Говорят, что функция f в точке x_0 удовлетворяет *условию Липшица порядка* $\alpha > 0$ *справа* (соответственно *слева*), если существуют постоянные C и $\delta > 0$ такие, что для любого $\xi \in (0; \delta)$ справедливо неравенство

$$|f(x_0 + \xi) - f(x_0 + 0)| \leqslant C\xi^{\alpha} \quad (|f(x_0 - \xi) - f(x_0 - 0)| \leqslant C\xi^{\alpha}).$$

Теорема 2. *Если функция* $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ *в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет односторонним условиям Липшица порядка* $\alpha > 0$, *то ее ряд Фурье в точке* x_0 *сходится к*

$$M_f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 1. Она также называется *признаком Липшица.*

Доказательство. Из четности ядра Фурье следует, что

$$\mathrm{T}_n(f;x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x_0+\xi)+f(x_0-\xi))\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi,$$

где $\int_0^\pi \mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi = \pi$. Поэтому

$$\mathrm{T}_n(f;x_0) - M_f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\int_0^\pi F_\pm(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi.$$

Здесь справа стоит сумма двух слагаемых с $F_+(\xi)$ и $F_-(\xi)$, где

$$F_\pm(\xi) = \frac{f(x_0\pm\xi)-f(x_0\pm 0)}{\sin\frac{\xi}{2}}.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, показывается, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_h^\pi F_\pm(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi = 0$$

для любого $h \in (0;\pi)$. А если $0 < h < \delta < \pi$, то

$$|F_\pm(\xi)| \leqslant \pi C|\xi|^{\alpha-1}.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{T}_n(f;x_0) - f(x_0)| \leqslant C\cdot\frac{1}{\alpha}h^\alpha$$

для любого $h \in (0;\delta)$. Теорема 2 доказана.

Чтобы сформулировать утверждение, аналогичное следствию 1, введем понятие односторонних производных для функции $f(x)$ в точке x_0, в которой она имеет разрыв 1-го рода. А именно, по определению положим

$$f'_\pm(x_0\pm 0) = \lim_{h\to+0}\frac{f(x_0\pm h)-f(x_0\pm 0)}{\pm h}.$$

Как и лемма 1, доказывается следующее утверждение.

Лемма 3. *Если функция f в точке x_0 имеет односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и односторонние производные $f'_{\pm}(x_0 \pm 0)$, то в этой точке функция f удовлетворяет односторонним условиям Липшица порядка $\alpha = 1$.*

Следствие 3. *Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-l; l)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ имеет односторонние производные $f'_{\pm}(x_0 \pm 0)$, то ее ряд Фурье в точке x_0 сходится к $M_f(x_0)$.*

Пример 5. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos \alpha x$, $x \in [-\pi; \pi]$, где α — некоторое действительное число. Эта функция на отрезке $[-\pi; \pi]$ непрерывно дифференцируема и на его концах принимает равные значения. Следовательно, она разлагается в ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе.

При любом α данная функция четная, поэтому она разлагается только по косинусам. Очевидно, интересным является лишь случай, когда α не является целым числом. В этом случае

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(\alpha + n)x + \cos(\alpha - n)x)\, dx =$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \cdot (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha + n} + \frac{1}{\alpha - n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \sin \alpha\pi.$$

Таким образом, если α нецелое, то

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right\}$$

для любого $x \in [-\pi; \pi]$. В частности, при $x = 0$ получаем равенство

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

4.2. Признак Дини. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и в этой точке непрерывна. Если, кроме того, существует $\delta > 0$ такое, что разностное отношение

$$\frac{f(x_0 + \xi) - f(x_0)}{\xi}$$

абсолютно интегрируемо на интервале $(-\delta; \delta)$, то говорят, что функция $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет *условию Дини*.

Очевидно, если функция f в точке x_0 удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то в этой точке она удовлетворяет и условию Дини. Обратное утверждение является неверным.

Теорема 1. *Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дини, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к $f(x_0)$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1 в п. 3.1, для $h \in (0;\delta)$ получаем неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{T}_n(f;x_0) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{h}|F(\xi)|\,d\xi,$$

где

$$|F(\xi)| \leqslant 2\pi\left|\frac{f(x_0+\xi)-f(x_0)}{\xi}\right|.$$

Отсюда и из условия Дини следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{T}_n(f;x_0) - f(x_0)| = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Для разрывной функции, имеющей односторонние пределы в некоторой точке, естественно рассматривать так называемые *односторонние условия Дини*. Именно, будем говорить, что функция f в точке x_0 удовлетворяет *условию Дини справа* (*слева*), если она определена в правой (соотв., левой) окрестности точки x_0, в точке x_0 имеет предел $f(x_0+0)$ (соотв., $f(x_0-0)$) и существует $\delta > 0$ такое, что разностное отношение

$$\frac{f(x_0+\xi)-f(x_0+0)}{\xi}\quad\left(\frac{f(x_0-\xi)-f(x_0-0)}{\xi}\right)$$

абсолютно интегрируемо на интервале $(0;\delta)$.

Теорема 2. *Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет односторонним условиям Дини, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к $M_f(x_0)$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, для любого $h \in (0;\delta)$ получаем неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{T}_n(f;x_0) - M_f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\int_{0}^{h}|F_\pm(\xi)|\,d\xi,$$

где

$$|F_\pm(\xi)| \leqslant 2\pi\left|\frac{f(x_0\pm\xi)-f(x_0\pm 0)}{\xi}\right|.$$

Отсюда и из односторонних условий Дини следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{T}_n(f;x_0) - M_f(x_0)| = 0.$$

Теорема 2 доказана.

Пример. Функция $f(x) = \left(\ln\dfrac{|x|}{2\pi}\right)^{-2}$ для $x \in [-\pi;\pi]$, $x \neq 0$, и $f(0) = 0$, в точке $x = 0$ непрерывна и удовлетворяет условию Дини. Следовательно, ее ряд Фурье в точке $x = 0$ сходится к $f(0) = 0$.

Легко видеть, что эта функция в точке $x = 0$ не удовлетворяет условию Липшица ни при одном $\alpha > 0$.

4.3. Признак Дирихле. Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, в этой точке удовлетворяет *условию Дирихле*, если существует $\delta > 0$ такое, что на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ она монотонна и ограничена.

Очевидно, функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Дирихле в точке x_0, в этой точке имеет конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$.

Теорема. *Если функция* $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ *в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию Дирихле, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к* $M_f(x_0)$.

Доказательство. Как известно,

$$|\mathrm{T}_n(f;x_0) - M_f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\left|\int_h^{\pi} F_{\pm}(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| + \\ + \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\left|\int_0^h (f(x_0\pm\xi) - f(x_0\pm 0))\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi\right|$$

для любого $h \in (0;\pi)$.

Согласно условию Дирихле, существует $\delta > 0$ такое, что функции $f(x_0\pm\xi)$ на интервале $(0;\delta)$ монотонны и ограничены. По второй теореме о среднем для любого $h \in (0;\delta)$ существует $\theta \in [0;h]$ такое, что

$$\int_0^h (f(x_0\pm\xi) - f(x_0\pm 0))\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi = \\ = (f(x_0\pm h) - f(x_0\pm 0))\int_\theta^h \mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi.$$

Как известно (см. п. 2.2), ядро Дирихле обладает следующим свойством: существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{D}_n(\xi)\, d\xi\right| \leqslant 2C\pi$$

для любых $\alpha, \beta \in (0; \pi)$ и любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $h \in (0; \delta)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|\mathrm{T}_n(f; x_0) - M_f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{\pm} |f(x_0 \pm h) - f(x_0 \pm 0)| + \frac{1}{2\pi} \sum_{\pm} \left|\int\limits_{h}^{\pi} F_{\pm}(\xi) \sin \lambda_n \xi \, d\xi\right|,$$

из которого следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\mathrm{T}_n(f; x_0) - M_f(x_0)| \leqslant C \sum_{\pm} |f(x_0 \pm h) - f(x_0 \pm 0)|$$

для любого $h \in (0; \delta)$. А так как в последнем неравенстве правая часть стремится к нулю при $h \to +0$, то

$$\lim_{n\to\infty} |\mathrm{T}_n(f; x_0) - M_f(x_0)| = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно-монотонна на интервале $(-\pi; \pi)$, то в любой точке $x \in (-\pi; \pi)$ ее ряд Фурье сходится к*

$$M_f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

а в точках $-\pi$ и π он сходится к $\dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$. В частности, в точках $x \in (-\pi; \pi)$, где f непрерывна, ряд Фурье сходится к $f(x)$.

Следствие 2. *Если непрерывная 2π-периодическая функция f кусочно-монотонна на отрезке $[-\pi; \pi]$, то в любой точке $x \in \mathbb{R}$ ее ряд Фурье сходится к $f(x)$.*

Следующие примеры показывают, что функция может удовлетворять условию Дини, но не удовлетворять условию Дирихле, и наоборот.

Пример 1. Функция $f(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$, определяемая равенствами $f(0) = 0$ и

$$f(x) = \left(\ln\frac{2\pi}{|x|}\right)^{-1} \quad \text{для} \quad x \neq 0,$$

в точке $x = 0$ удовлетворяет условию Дирихле: она непрерывна, монотонно убывает на интервале $(-\pi; 0)$ и монотонно возрастает на интервале $(0;\pi)$. Однако в этой точке она не удовлетворяет условию Дини. Действительно,

$$\int_0^\pi \frac{f(x) - f(0)}{x}\,dx = \int_0^\pi \frac{dx}{x\ln(2\pi/x)} = +\infty.$$

Пример 2. Функция $f(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$, определяемая равенствами $f(0) = 0$ и

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x} \quad \text{для} \quad x \neq 0,$$

в точке $x = 0$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x) - f(0)| \leqslant |x|,$$

а следовательно, удовлетворяет и условию Дини. Однако в этой точке она не удовлетворяет условию Дирихле.

§ 5. Признаки равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье

5.1. Признаки равномерной сходимости для дифференцируемых функций. Из следствия 1, доказанного в п. 3.3, сразу получаем следующий признак равномерной сходимости ряда Фурье.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна и такая, что $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда, если она на интервале $(-\pi;\pi)$ имеет кусочно-непрерывную и абсолютно интегрируемую производную 2-го порядка, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на $[-\pi;\pi]$. Более того, существует постоянная C такая, что*

$$|f(x) - \mathrm{T}_n(f;x)| \leqslant \frac{C}{n} \quad \forall x \in [-\pi;\pi], \quad \forall n \in N.$$

Доказательство. Продолжим данную функцию на $\mathbb{R}$ периодически с периодом 2π. Продолженная функция непрерывна на $\mathbb{R}$

и, кроме того, в каждой точке удовлетворяет условию Липшица порядка 1, поэтому ее ряд Фурье в любой точке $x \in [-\pi; \pi]$ сходится к $f(x)$. Следовательно,

$$f(x) - \mathrm{T}_n(f; x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

$$|f(x) - \mathrm{T}_n(f; x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \quad \forall x \in [-\pi; \pi], \tag{1}$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f.

В п. 3.3 доказано (см. следствие 1), что существует постоянная C такая, что

$$|a_k| + |b_k| \leqslant \frac{C}{k^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$|f(x) - \mathrm{T}_n(f; x)| \leqslant C \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < C \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{C}{n}$$

для любого $x \in [-\pi; \pi]$. Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на $\mathbb{R}$ имеет непрерывную производную r-го порядка. Тогда, если производная $f^{(r)}(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$ имеет кусочно-непрерывную и абсолютно интегрируемую производную 2-го порядка, то существует постоянная C такая, что*

$$|f(x) - \mathrm{T}_n(f; x)| \leqslant \frac{C}{n^{r+1}} \quad \forall x \in [-\pi; \pi].$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, получаем неравенство (1). В п. 3.3 доказано (см. следствие 2), что при условиях теоремы существует постоянная C такая, что

$$|a_k| + |b_k| \leqslant \frac{C}{k^{r+2}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$|f(x) - \mathrm{T}_n(f; x)| \leqslant C \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+2}} <$$

$$< C \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{r+2}} = \frac{C}{(r+1)n^{r+1}} < \frac{C}{n^{r+1}}$$

для любого $x \in [-\pi; \pi]$. Теорема 2 доказана.

Для разрывной функции докажем один простой признак равномерной сходимости ряда Фурье на любом отрезке, не содержащем ее точек разрыва.

Теорема 3. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$ имеет кусочно-непрерывную и абсолютно интегрируемую производную 2-го порядка, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на любом отрезке, не содержащем ее точек разрыва.*

Доказательство. В любой точке непрерывности функция f удовлетворяет условию Липшица порядка 1, и поэтому ее ряд Фурье сходится к значению f в этой точке.

Пусть, для простоты, функция f может иметь разрывы лишь в точках $x = \pi + 2k\pi$ и $x = x_0 + 2k\pi$, где $x_0 \in (-\pi;\pi)$. И пусть, например, $[a;b] \subset (x_0;\pi)$. Докажем, что на $[a;b]$ ряд Фурье данной функции сходится равномерно. А именно, докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right), \qquad (2)$$

где a_n, b_n, c_n, c_{-n} — коэффициенты Фурье функции f, сходится равномерно на $[a;b]$.

В п. 3.3 доказано, что

$$c_\nu(f) = \frac{1}{2\pi\nu i}[f]_{x_0} e^{-i\nu x_0} + \frac{1}{2\pi\nu i}[f]_\pi e^{-i\nu\pi} + \frac{1}{i\nu} c_\nu(f'),$$

где $[f]_{x_0}$ и $[f]_\pi$ — скачки функции f в точках x_0 и π. Там же было доказано, что

$$c_\nu(f') = O\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \text{при} \quad \nu \to \pm\infty.$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{in}\left(c_n(f')e^{inx} - c_{-n}(f')e^{-inx}\right)$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим ряд с $[f]_{x_0}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ni} e^{in(x-x_0)} - \frac{1}{ni} e^{-in(x-x_0)}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-x_0)}{n}.$$

По признаку Дирихле этот ряд сходится равномерно на любом отрезке, на котором $\sin\dfrac{x-x_0}{2} \neq 0$. Это условие выполнено на выбранном отрезке $[a;b]$.

Аналогичное утверждение верно и для ряда с $[f]_\pi$.

Таким образом, ряд (2) сходится равномерно на отрезке $[a;b]$. Теорема 3 доказана.

5.2. Признак Липшица. Говорят, что функция $f(x)$, $x \in (A;B)$, на интервале $(A;B)$ удовлетворяет *условию Липшица порядка* $\alpha > 0$, если существует постоянная C такая, что

$$|f(x+\xi) - f(x)| \leqslant C|\xi|^\alpha$$

для любого $x \in (A;B)$ и любого ξ такого, что $x + \xi \in (A;B)$.

Теорема. *Если функция* $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ *на интервале* $(A;B)$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* $\alpha > 0$, *то ее ряд Фурье на любом отрезке* $[a;b] \subset (A;B)$ *сходится равномерно к* $f(x)$.

Доказательство. При доказательстве признака Липшица в п. 4.1 получено равенство

$$\mathrm{T}_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,\xi)\sin\lambda_n\xi\, d\xi,$$

где

$$F(x;\xi) = \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\sin\frac{\xi}{2}}, \qquad \lambda_n = n + \frac{1}{2}.$$

Пусть $\delta = \min\{a - A; B - b\}$. Тогда, как и в п. 4.1, получаем, что функция $F(x;\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$|F(x;\xi)| \leqslant \pi C|\xi|^{\alpha-1}$$

для любого $x \in [a;b]$ и любого $\xi \in (-\delta;\delta)$. Следовательно, для любого $x \in [a;b]$ и любого $h \in (0;\delta)$ справедливо неравенство

$$|\mathrm{T}_n(f;x) - f(x)| \leqslant C\frac{1}{\alpha}h^\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{h} F(x;\xi)\sin\lambda_n\xi\, d\xi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{h}^{\pi} F(x;\xi)\sin\lambda_n\xi\, d\xi\right|. \quad (1)$$

Покажем, что для любого $h \in (0;\delta)$

$$\sup_{x\in[a;b]}\left|\int_{h}^{\pi} F(x;\xi)\sin\lambda_n\xi\, d\xi\right| \to 0 \quad (2)$$

при $n \to \infty$.

Так как функция $\sin\dfrac{\xi}{2}$ на интервале $(0;\pi)$ непрерывна, неотрицательна и монотонно возрастает, то, согласно второй теореме

о среднем, для любого $x \in [a; b]$ и любого $h \in (0; \pi)$ существует $\theta \in [h; \pi]$ такое, что

$$\int_h^\pi F(x;\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi = \frac{1}{\sin\frac{h}{2}}\int_h^\theta (f(x+\xi)-f(x))\sin\lambda_n\xi\,d\xi.$$

Легко видеть, что для любого $x \in [a; b]$

$$\left|\int_h^\theta f(x)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \leqslant \frac{2}{\lambda_n}\sup_{x\in[a;b]}|f(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$. Далее,

$$\left|\int_h^\theta f(x+\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \leqslant \left|\int_h^\theta f(x+\xi)e^{i\lambda_n\xi}\,d\xi\right| =$$

$$= \left|\int_{h+x}^{\theta+x} f(y)e^{i\lambda_n y}\,dy\right| \leqslant \sup_{\alpha,\beta}\left|\int_\alpha^\beta f(y)e^{i\lambda_n y}\,dy\right|,$$

где супремум берется по всем $\alpha, \beta \in [a-\pi; b+\pi]$. По теореме Римана о равномерной осцилляции этот супремум стремится к нулю при $n \to \infty$. Утверждение (2) доказано. Аналогично доказывается, что

$$\sup_{x\in[a;b]}\left|\int_{-\pi}^h F(x;\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \to 0 \tag{3}$$

при $n \to \infty$.

Из (1), (2), (3) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{x\in[a;b]}|\mathrm{T}_n(f;x)-f(x)| \leqslant C\cdot\frac{1}{\alpha}h^\alpha$$

для любого $h \in (0; \delta)$. Теорема доказана.

Из теоремы о среднем Лагранжа сразу следует, что если функция на некотором интервале имеет ограниченную производную, то на этом интервале она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = 1$. Поэтому получаем следующее утверждение.

Следствие. *Если функция $f \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ на интервале $(A; B)$ имеет ограниченную производную, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[a; b] \subset (A; B)$.*

Пример 1. Функция $f(x)$, равная $\operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1;1)$ и периодически продолженная с периодом $T=2$, на любом интервале вида $(p;p+1)$, где p — целое, имеет ограниченную производную. Следовательно, ее ряд Фурье на любом отрезке $[a;b]\subset(p;p+1)$ сходится равномерно к $f(x)$.

Заметим, что на отрезке $[p;p+1]$ этот ряд сходится к разрывной функции, и поэтому на $[p;p+1]$ он сходится неравномерно.

Пример 2. Функция $f(x)$, равная $|x|$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ и периодически с периодом $T=2\pi$ продолженная на $\mathbb{R}$, удовлетворяет на $\mathbb{R}$ условию Липшица порядка $\alpha=1$. Следовательно, ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на любом конечном отрезке $[a;b]$. Отсюда и из периодичности f следует, что этот ряд сходится к $f(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$.

5.3. Признак Дини. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем отрезок $[a;b]$, и в каждой точке этого отрезка непрерывна. Тогда, если существует $\delta>0$ такое, что для любого $x\in[a;b]$ интеграл

$$\psi(\delta;x)=\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi}\right|d\xi$$

сходится, то говорят, что функция f удовлетворяет условию Дини на отрезке $[a;b]$. Если, кроме того,

$$\sup_{x\in[a;b]}\psi(h;x)\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0, \tag{1}$$

то будем говорить, что функция f на отрезке $[a;b]$ удовлетворяет *равномерному условию Дини.*

Теорема. *Если функция* $f(x)\in\overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ *на отрезке* $[a;b]$ *удовлетворяет равномерному условию Дини, то ее ряд Фурье сходится к* $f(x)$ *равномерно на* $[a;b]$.

Доказательство. Как и при доказательстве признака Липшица в п. 5.2, для любого $h\in(0;\delta)$ получаем неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{x\in[a;b]}|\mathrm{T}_n(f;x)-f(x)|\leqslant\sup_{x\in[a;b]}\psi(h;x).$$

Тогда отсюда и из условия (1) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{x\in[a;b]}|\mathrm{T}_n(f;x)-f(x)|=0.$$

Теорема доказана.

5.4. Признак Дирихле. Напомним, что функция $f(x)$, $x \in \Delta$, называется кусочно-монотонной на промежутке Δ, если промежуток Δ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция f монотонна.

Лемма. *Любая непрерывная кусочно-монотонная на некотором промежутке функция на этом промежутке представима в виде разности двух непрерывных монотонно возрастающих функций.*

Доказать в качестве упражнения.

Теорема. *Если функция* $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ *непрерывна и кусочно-монотонна на интервале* $(A;B)$, *то ее ряд Фурье сходится к* $f(x)$ *равномерно на любом отрезке* $[a;b] \subset (A;B)$.

Доказательство. Пусть $\delta = \min\{a - A; B - b\}$. Тогда, как известно, для любого $x \in [a;b]$ и любого $h \in (0;\delta)$ справедливо неравенство

$$|\mathrm{T}_n(f;x) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\left|\int_h^{\pi} F(x;\pm\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-h}^{h}(f(x+\xi)-f(x))\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi\right|. \tag{1}$$

Первые два слагаемых мы уже оценивали. Оценим последнее слагаемое. Для этого функцию f на интервале $(A;B)$ представим в виде разности двух непрерывных монотонно возрастающих функций: $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. Тогда для любого $h \in (0;\delta)$ и любого $x \in [a;b]$ существует $\theta \in [0;h]$ такое, что

$$\int_0^h (\varphi(x\pm\xi) - \varphi(x))\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi = (\varphi(x\pm h) - \varphi(x))\int_\theta^h \mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi.$$

Как известно (см. п. 2.3), существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left|\int_\alpha^\beta \mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi\right| \leqslant 2C\pi$$

для любых $\alpha, \beta \in (0;\pi)$ и любого $n \in \mathbb{N}$. Если теперь через $\omega_\varphi(h)$ обозначим модуль непрерывности функции φ на отрезке

$[a-\delta/2;\ b+\delta/2]$, то для любого $x \in (a;b)$ и любого $h \in (0;\delta/2)$ получим неравенство

$$\left|\int_0^h (\varphi(x \pm \xi) - \varphi(x))\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi\right| \leqslant 2C\pi\omega_\varphi(h). \qquad (2)$$

Аналогично,

$$\left|\int_0^h (\psi(x \pm \xi) - \psi(x))\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi\right| \leqslant 2C\pi\omega_\psi(h). \qquad (3)$$

Из (1), (2), (3) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x\in[a;b]} |\mathrm{T}_n(f;x) - f(x)| \leqslant 2C\omega_\varphi(h) + 2C\omega_\psi(h)$$

для любого $h \in (0;\delta/2)$. А так как функции φ и ψ равномерно непрерывны на отрезке $[a-\delta/2;\ b+\delta/2]$, то $\omega_\varphi(h) \to 0$ и $\omega_\psi(h) \to 0$ при $h \to +0$ и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a;b]} |\mathrm{T}_n(f;x) - f(x)| = 0.$$

Теорема доказана.

5.5. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Рассмотрим функцию $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ и ее ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x}. \qquad (1)$$

Сначала сформулируем и докажем *теорему о почленном дифференцировании ряда Фурье.*

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна и такая, что $f(-\pi) = f(\pi)$, а на интервале $(-\pi;\pi)$ имеет кусочно-непрерывную и абсолютно интегрируемую производную $f'(x)$, то ряд Фурье для $f'(x)$ получается из ряда Фурье для $f(x)$ почленным дифференцированием, т.е.*

$$f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} i\nu c_\nu e^{i\nu x}. \qquad (2)$$

Действительно, $c_0(f') = 0$, а $c_\nu(f') = i\nu c_\nu(f)$ (см. п. 3.3).

Заметим, что в этой теореме ничего не утверждается ни о сходимости ряда (1), ни тем более о сходимости ряда (2). Несколько иной характер имеет *теорема о почленном интегрировании ряда Фурье.*

Теорема 2. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$ кусочно-непрерывна и ограничена, то для любых x и x_0*

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = c_0(x-x_0) + \sum_{\substack{-\infty\\ \nu\neq 0}}^{+\infty} c_\nu \frac{1}{i\nu} e^{i\nu\xi}\Big|_{x_0}^{x}, \tag{3}$$

т.е. почленно проинтегрированный ряд Фурье функции f сходится, и его сумма равна интегралу от f. Более того, этот ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Очевидно, функция

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (f(\xi)-c_0)\,d\xi$$

на $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1. Кроме того, она периодическая с периодом 2π. Действительно,

$$F(x+2\pi) = \int\limits_{x_0}^{x+2\pi} (f(\xi)-c_0)\,d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} (f(\xi)-c_0)\,d\xi = F(x)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, ее ряд Фурье сходится к $F(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$.

Легко видеть, что $\forall\,\nu \neq 0 \quad c_\nu(F) = \dfrac{1}{i\nu}(F') = \dfrac{1}{i\nu}c_\nu(f)$. Таким образом,

$$F(x) = C_0 + \sum_{\substack{-\infty\\ \nu\neq 0}}^{+\infty} c_\nu \frac{1}{i\nu} e^{i\nu x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где C_0 — нулевой коэффициент Фурье функции $F(x)$. Отсюда при $x = x_0$ имеем

$$0 = C_0 + \sum_{\substack{-\infty\\ \nu\neq 0}}^{+\infty} c_\nu \frac{1}{i\nu} e^{i\nu x_0}. \tag{5}$$

Теперь из (4) и (5) получаем равенство

$$\int_{x_0}^{x} (f(\xi) - c_0)\, d\xi = -\sum_{\substack{-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} c_\nu \frac{1}{i\nu} e^{i\nu x_0} + \sum_{\substack{-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} c_\nu \frac{1}{i\nu} e^{i\nu x},$$

из которого и следует равенство (3). Теорема 2 доказана.

Заметим, что в теореме 2 ничего не говорится о сходимости ряда (1), а про почленно проинтегрированный ряд утверждается, что он сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к проинтегрированной функции.

§ 6. Приближение непрерывных функций многочленами

6.1. Суммирование последовательностей и рядов методом средних арифметических. Легко доказать, что если числовая последовательность $\{a_n\}$ сходится, то последовательность из средних арифметических

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

тоже сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Однако обратное утверждение является неверным. Например, последовательность $a_n = 1 - (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, расходится, но последовательность $\{b_n\}$ из средних арифметических сходится. Действительно, если n четное, то $b_n = 1$, а если n нечетное, то $b_n = 1 + \frac{1}{n}$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$, у которой последовательность $\{b_n\}$ из средних арифметических сходится, называется *суммируемой методом средних арифметических.* Причем, если последовательность $\{b_n\}$ сходится к a, то говорят, что *последовательность $\{a_n\}$ методом средних арифметических суммируется к a.*

Определение 2. Ряд называется *суммируемым методом средних арифметических* (или *методом Чезаро*), если последовательность его частичных сумм суммируется методом средних арифметических.

Пример. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ расходится, но методом средних арифметических суммируется, так как последовательность его частичных сумм $1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$ методом средних арифметических суммируется к $1/2$.

В следующем пункте будет доказано, что тригонометрический ряд Фурье любой непрерывной периодической функции суммируется к этой функции методом средних арифметических.

6.2. Теорема Фейера. Пусть $\mathrm{T}_n(f;x)$ — n-я сумма Фурье функции $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$. Тогда, как известно,

$$\mathrm{T}_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)\mathrm{D}_n(\xi)\,d\xi,$$

где $\mathrm{D}_n(\xi)$ — ядро Дирихле порядка n, т.е.

$$\mathrm{D}_n(\xi) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k\xi, \tag{1}$$

если $n \geqslant 1$, и $D_0(\xi) = 1$.

Рассмотрим средние арифметические сумм Фурье

$$S_n(f;x) = \frac{\mathrm{T}_0(f;x) + \mathrm{T}_1(f;x) + \dots + \mathrm{T}_n(f;x)}{n+1}.$$

Выразив их через ядро Дирихле, для $S_n(f;x)$ получим формулу

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)\Phi_n(\xi)\,d\xi,$$

где $\Phi_n(\xi)$ — среднее арифметическое ядер Дирихле:

$$\Phi_n(\xi) = \frac{\mathrm{D}_0(\xi) + \mathrm{D}_1(\xi) + \dots + \mathrm{D}_n(\xi)}{n+1}. \tag{2}$$

Функция $\Phi_n(\xi)$ называется *ядром Фейера порядка n*.

Из формул (1) и (2) следует, что ядро Фейера $\Phi_n(x)$ при любом n является четной 2π-периодической функцией и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(\xi)\,d\xi = 1 \quad \forall n. \tag{3}$$

Напомним, что

$$\mathrm{D}_n(\xi) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{\sin\frac{\xi}{2}}.$$

Поэтому

$$\Phi_n(\xi) = \frac{1}{(n+1)\sin\frac{\xi}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\xi.$$

Преобразуем последнюю сумму:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\xi = \frac{1}{2\sin\frac{\xi}{2}} \sum_{k=0}^{n} (\cos k\xi - \cos(k+1)\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\xi}{2}}(1-\cos(n+1)\xi) = \frac{1}{\sin\frac{\xi}{2}}\left(\sin(n+1)\frac{\xi}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\Phi_n(\xi) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}}\right)^2. \tag{4}$$

Здесь правая часть не определена в точках $\xi = 2k\pi$. Доопределим ее в этих точках по непрерывности, положив $\Phi_n(2k\pi) = n+1$.

Теорема. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то $S_n(f;x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Из свойства (3) ядра Фейера следует, что

$$S_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+\xi) - f(x))\Phi_n(\xi)\,d\xi.$$

Далее, в силу неотрицательности ядра Фейера,

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+\xi) - f(x)|\Phi_n(\xi)\,d\xi. \tag{5}$$

Через $\|f\|_C$ обозначим максимум модуля функции f, а через $\omega_f(\delta)$ — ее модуль непрерывности. Тогда для любого $\delta \in (0;\pi)$ из (5) получаем неравенство:

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(\xi)\,d\xi \cdot 2\|f\|_C +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(\xi)\,d\xi \cdot \omega_f(\delta) + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(\xi)\,d\xi \cdot 2\|f\|_C =$$

$$= \frac{2}{\pi}\|f\|_C\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(\xi)\,d\xi + \omega_f(\delta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(\xi)\,d\xi.$$

Так как ядро Фейера неотрицательно и удовлетворяет условию (3), то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(\xi)\,d\xi \leqslant 1.$$

Из формулы (4) следует, что

$$\Phi_n(\xi) \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\xi}{2}},$$

поэтому

$$\int\limits_{\delta}^{\pi}\Phi_n(\xi)\,d\xi \leqslant \frac{1}{n+1}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{d\xi}{\sin^2\frac{\xi}{2}} = \frac{-2}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{\xi}{2}\Big|_{\delta}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \frac{2}{(n+1)\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} \leqslant \frac{4}{(n+1)\delta}.$$

Таким образом,

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leqslant \frac{8\|f\|_C}{\pi\delta(n+1)} + \omega_f(\delta)$$

для любого $\delta\in(0;\pi)$. Положим $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Тогда

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leqslant \frac{8}{\pi}\|f\|_C\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

для любого $n\in\mathbb{N}$. Теорема доказана.

Эта теорема называется *теоремой Фейера.* Из нее, в частности, следует, что ряд Фурье любой непрерывной 2π-периодической функции f в любой точке $x\in\mathbb{R}$ методом средних арифметических суммируется к $f(x)$. Это утверждение представляет особый интерес в связи с тем, что известны примеры непрерывных 2π-периодических функций, ряды Фурье которых расходятся в любой рациональной точке.

6.3. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами. Чтобы сформулировать первое утверждение, введем одно новое понятие.

Определение. Функция

$$\tau_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx,$$

где α_0, α_k, β_k — некоторые действительные числа, называется *тригонометрическим многочленом порядка* n.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $\tau(x)$ такой, что*

$$|f(x) - \tau(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi; \pi].$$

Доказательство. Продолжив функцию $f(x)$ на $\mathbb{R}$ периодически с периодом 2π, получим функцию, для которой справедлива теорема Фейера. Для доказательства осталось заметить, что суммы Фурье функции f и их средние арифметические являются тригонометрическими многочленами. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a; b]. \tag{1}$$

Доказательство. Если $a = b$, то утверждение теоремы очевидно, так как в этом случае $P(x) = f(a)$. В общем случае, т.е. когда $a < b$, рассмотрим четную функцию $\varphi(t)$, которая на отрезке $[0; \pi]$ определена равенством

$$\varphi(t) = f\left(a + \frac{l}{\pi} t\right),$$

где $l = b - a$. Она удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $\tau(t)$ такой, что

$$|\varphi(t) - \tau(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [-\pi; \pi]. \tag{2}$$

Тригонометрический многочлен $\tau(t)$ является аналитической функцией на $\mathbb{R}$, т.е. разлагается в степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, который сходится к $\tau(t)$ равномерно на любом конечном промежутке. Следовательно, существует n такое, что

$$\left|\tau(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [-\pi; \pi]. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $Q(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ такой, что $|\varphi(t) - Q(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [-\pi; \pi]$.

По построению, если $t \in [0;\pi]$, то $\varphi(t) = f(x)$, где $x = a + \dfrac{l}{\pi}t \in$ $\in [a;b]$. Следовательно, многочлен $P(x) = Q\left(\dfrac{\pi}{l}(x-a)\right)$ удовлетворяет неравенству (1). Теорема 2 доказана.

Доказанные теоремы будем называть *теоремами Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.* Эти теоремы часто формулируют следующим образом.

Теорема 1′. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то существует последовательность тригонометрических многочленов, которая сходится к $f(x)$ равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$.*

Теорема 2′. *Для любой непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ существует последовательность алгебраических многочленов, которая сходится к $f(x)$ равномерно на $[a;b]$.*

В частности, любая непрерывная на отрезке функция разлагается на этом отрезке в равномерно сходящийся ряд, членами которого являются алгебраические многочлены.

6.4. Полные и неполные системы в пространстве непрерывных функций. Множество всех функций, определенных и непрерывных на отрезке Δ, обозначается $C(\Delta)$ и называется *пространством непрерывных на Δ функций.* Для любой функции $f(x) \in$ $\in C(\Delta)$ число

$$\|f\|_{C(\Delta)} = \max_{x\in\Delta} |f(x)|$$

называется *нормой* (или *C-нормой*) *функции f.* Иногда вместо $\|f\|_{C(\Delta)}$ будем писать $\|f\|_C$.

Определение. Система функций $\{\varphi_k\}$, определенных на отрезке Δ, называется *полной в пространстве $C(\Delta)$*, если для любой функции $f \in C(\Delta)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ функций этой системы, для которой справедливо неравенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|_{C(\Delta)} < \varepsilon.$$

Используя это понятие, теоремы Вейерштрасса, доказанные в предыдущем пункте, можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Тригонометрическая система*

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx\ , \sin nx\ , \ldots$$

полна в пространстве $\overset{*}{C}[-\pi;\pi]$ непрерывных 2π-периодических функций.

Теорема 2. *Система функций* $1,\ x,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$ *полна в пространстве* $C(\Delta)$ *для любого отрезка* Δ.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Система функций $1,\ \cos x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots$ полна в пространстве $C[0;\pi]$.

Действительно, любую функцию из $C[0;\pi]$ можно продолжить четным образом на отрезок $[-\pi;0]$, а затем периодически с периодом 2π — на всю действительную ось. Ряд Фурье полученной функции содержит только функции данной системы. Отсюда и из теоремы Фейера следует, что данная система полна в пространстве $C[0;\pi]$.

Пример 2. Система функций $\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots$ не является полной в $\overset{*}{C}[-\pi;\pi]$.

Через $S(x)$ обозначим произвольную линейную комбинацию функций данной системы. Тогда для любой функции $f(x) \in \overset{*}{C}[-\pi;\pi]$ имеем

$$\|f(x) - S(x)\|_C = \|f(-x) - S(-x)\|_C = \|f(-x) + S(x)\|_C.$$

Следовательно,

$$\|f(x) + f(-x)\|_C \leqslant \\ \leqslant \|f(x) - S(x)\|_C + \|S(x) + f(-x)\|_C = 2\|f(x) - S(x)\|_C.$$

Для функции $f(x) = \cos(x)$ отсюда следует, что

$$2\|\cos x - S(x)\|_C \geqslant \|2\cos x\|_C = 2,$$

т.е. $\|\cos x - S(x)\|_C \geqslant 1$ для любой линейной комбинации $S(x)$ функций данной системы.

Пример 3. Система функций $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots$ не является полной в $\overset{*}{C}[-\pi;\pi]$.

Через $C(x)$ обозначим произвольную линейную комбинацию данной системы. Тогда для любой функции $f(x) \in \overset{*}{C}[-\pi;\pi]$ имеем

$$\|f(x) - f(-x)\|_C \leqslant \\ \leqslant \|f(x) - C(x)\|_C + \|C(x) - f(-x)\|_C = 2\|f(x) - C(x)\|_C.$$

Положим $f(x) = \sin x$. Тогда

$$2\|\sin x - C(x)\|_C \geqslant 2\|\sin x\|_C = 2; \quad \|\sin x - C(x)\|_C \geqslant 1.$$

6.5. О полных системах в пространстве абсолютно интегрируемых функций. Множество всех функций из L_1^R является линейным пространством с естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число. Поэтому оно называется *пространством абсолютно интегрируемых функций*. Для любой функции $f(x) \in L_1^R$ число

$$\|f\|_{L_1^R(\Delta)} = \int\limits_{\Delta} |f(x)|\, dx$$

называется *нормой* (или L_1-*нормой*) *функции* f.

Определение. Система функций $\{\varphi_k\}$, определенных на промежутке Δ, называется *полной в пространстве* L_1^R, если для любой функции $f \in L_1^R$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ функций этой системы, для которой справедливо неравенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|_{L_1(\Delta)} < \varepsilon.$$

Построение полных в L_1^R систем функций основано на следующей лемме.

Лемма. *Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $\Delta = [a;b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, $x \in \Delta$, такая, что*

$$\|f - \varphi\|_{L_1(\Delta)} < \varepsilon \tag{1}$$

и, кроме того, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Доказательство. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$. Из теоремы об аппроксимации, доказанной в § 3 следует, что существует ступенчатая функция $\psi(x)$, $x \in \Delta$, такая, что

$$\|f - \psi\|_{L_1(\Delta)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Пусть функция ψ имеет N ступенек, т.е. существуют точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b,$$

которые отрезок $[a;b]$ разбивают на N промежутков, на каждом из которых функция ψ постоянна. Каждую такую ступеньку заменим трапецией так, как показано на рис. 14.1. Эти трапеции образуют непрерывную функцию $\varphi(x)$, $x \in \Delta$.

Рис. 14.1

Очевидно,

$$\|\psi-\varphi\|_{L_1(\Delta)} \leqslant 2N\|\psi\|_{C(\Delta)}\cdot\frac{\delta}{2}.$$

Выбрав δ достаточно малым, получим

$$\|\psi-\varphi\|_{L_1(\Delta)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

По построению, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, а из (2) и (3) следует (1). Лемма доказана.

Теорема 1. *Тригонометрическая система полна в пространстве $L_1^R(\Delta)$, где $\Delta=[-\pi;\pi]$.*

Доказательство. Пусть $f\in L_1^R(\Delta)$. Из доказанной леммы следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, $x\in\Delta$, такая, что $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)=0$ и

$$\|f-\varphi\|_{L_1(\Delta)}<\varepsilon.$$

А из теоремы Вейерштрасса следует, что существует тригонометрический многочлен $\tau(x)$ такой, что

$$|\varphi(x)-\tau(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in\Delta.$$

Поэтому для этого многочлена $\tau(x)$ имеем

$$\|f-\tau\|_{L_1(\Delta)} \leqslant \|f-\varphi\|_{L_1(\Delta)} + \|\varphi-\tau\|_{L_1(\Delta)} < \varepsilon+\varepsilon\cdot 2\pi.$$

Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого отрезка $\Delta=[a;b]$ система функций $1,\ x,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$ полна в пространстве L_1^R.*

В общем случае имеет место следующее утверждение:

Если некоторая система функций на отрезке Δ полна в $C(\Delta)$, то она полна и в $L_1^R(\Delta)$.

Докажите это в качестве упражнения.

§ 7. Ряды Фурье интегрируемых с квадратом функций

7.1. Пространство функций с интегрируемым квадратом. Через $L_2^R(\Delta)$ будем обозначать множество всех функций, определенных на некотором промежутке Δ (конечном или бесконечном), для каждой из которых существует хотя бы одно допустимое исчерпание промежутка Δ, и интеграл от квадрата ее модуля на Δ сходится. Будем предполагать, что рассматриваемые функции могут принимать как действительные, так и комплексные значения.

Из очевидного неравенства

$$2|f(x)|\cdot|g(x)| \leqslant |f(x)|^2 + |g(x)|^2 \tag{1}$$

следует, что если функции f и g принадлежат $L_2^R(\Delta)$, то их произведение абсолютно интегрируемо на Δ. А из неравенства

$$|f(x)+g(x)|^2 \leqslant 2\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right),$$

которое получается из (1), следует, что если функции f и g принадлежат $L_2^R(\Delta)$, то их сумма и, следовательно, любая их линейная комбинация тоже принадлежат $L_2^R(\Delta)$. Это означает, что множество функций из $L_2^R(\Delta)$ с обычными операциями сложения двух функций и умножения функции на число является линейным (векторным) пространством над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел или, соответственно, над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В любом случае в $L_2^R(\Delta)$ можно ввести скалярное произведение. В линейном пространстве $L_2^R(\Delta)$ над полем действительных чисел оно вводится по формуле

$$(f,g) = \int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx, \tag{2}$$

а над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ — по формуле

$$(f,g) = \int\limits_{\Delta} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{3}$$

Из формулы (2) следует, что

$$(f,g) = (g,f), \quad (\alpha f, g) = \alpha(f,g),$$
$$(f+\varphi, g) = (f,g) + (\varphi, g), \quad (f,f) \geqslant 0$$

для любых функций f, g, φ из $L_2^R(\Delta)$ и любого действительного числа α, т.е. произведение (2) обладает всеми свойствами обычного скалярного произведения, кроме одного. А именно, из условия $(f,f) = 0$ не следует, что функция f на Δ тождественно равна нулю. Поэтому, по определению, считают функции f и g из $L_2^R(\Delta)$ равными в $L_2^R(\Delta)$, если $(f-g, f-g) = 0$.

Определение 1. Линейное пространство $L_2^R(\Delta)$ над полем $\mathbb{R}$, в котором по формуле (2) введено скалярное произведение, будем называть *евклидовым пространством интегрируемых с квадратом функций*. Его тоже будем обозначать $L_2^R(\Delta)$.

Легко видеть, что произведение (3) обладает всеми свойствами произведения (2), кроме первого. Вместо него имеем

$$(f,g)=\overline{(g,f)},$$

и поэтому

$$(\alpha f,g)=\alpha(f,g),\quad (f,\alpha g)=\overline{\alpha}(f,g)$$

для любого комплексного числа α.

Определение 2. Линейное пространство $L_2^R(\Delta)$ над полем $\mathbb{C}$, в котором по формуле (3) введено скалярное произведение, будем называть *комплексным евклидовым* (*унитарным* или *эрмитовым*) *пространством интегрируемых с квадратом функций* и обозначать, как и прежде, $L_2^R(\Delta)$.

Как обычно, две функции из $L_2^R(\Delta)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Система функций из $L_2^R(\Delta)$ называется ортогональной, если любые две функции этой системы ортогональны. Наконец, ортогональная система $\{\varphi_k\}$ называется ортонормированной на промежутке Δ, если $\|\varphi_k\|_{L_2(\Delta)}=1\quad\forall k$.

Для любой функции $f\in L_2^R(\Delta)$ неотрицательное число $\sqrt{(f,f)}$ называется L_2-*нормой* (или просто *нормой*) и обозначается $\|f\|_{L_2(\Delta)}$, $\|f\|_{L_2}$ или просто $\|f\|$. Таким образом, по определению,

$$\|f\|_{L_2(\Delta)}=\left(\int\limits_{\Delta}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Лемма 1. *Для любых функций f и g из $L_2^R(\Delta)$ справедливо неравенство*

$$|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|. \tag{3}$$

Доказательство. Для любого $\alpha\in\mathbb{C}$ имеем:

$$0\leqslant(f+\alpha g,f+\alpha g)=(f,f)+\overline{\alpha}(f,g)+\alpha(g,f)+\alpha\overline{\alpha}(g,g).$$

Положив здесь $\alpha=-\dfrac{(f,g)}{(g,g)+\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$, получим неравенство

$$0\leqslant(f,f)-2\frac{(f,g)}{(g,g)+\varepsilon}\overline{(f,g)}+\frac{|(f,g)|^2}{(g,g)+\varepsilon},$$

из которого следует, что

$$|(f,g)|^2\leqslant\|f\|^2(\|g\|^2+\varepsilon)$$

для любого $\varepsilon>0$. Отсюда в пределе при $\varepsilon\to+0$ следует неравенство

$$|(f,g)|^2\leqslant\|f\|^2\|g\|^2,$$

которое равносильно неравенству (3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любых функций f и g из $L_2^R(\Delta)$ справедливо неравенство треугольника*

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|. \tag{4}$$

Действительно,

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = \|f\|^2 + (f,g) + \overline{(f,g)} + \|g\|^2 =$$
$$= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(f,g) + \|g\|^2 \leqslant \|f\|^2 + 2|(f,g)| + \|g\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2,$$

что и доказывает неравенство (4).

Неравенство (3) впервые получено В.Я. Буняковским. Иногда это неравенство называют неравенством Шварца, хотя в его работах оно появилось значительно позже. *Неравенство Буняковского* является интегральным аналогом неравенства Коши для конечных сумм, поэтому его естественно называть *неравенством Коши-Буняковского.*

Определение 3. Говорят, что последовательность функций $f_n(x) \in L_2^R(\Delta)$, $n \in \mathbb{N}$, *в* $L_2^R(\Delta)$ (или *по L_2-норме*) *сходится к функции* $f(x) \in L_2^R(\Delta)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L_2(\Delta)} = 0.$$

В этом случае пишут: $f_n \to f$ в $L_2(\Delta)$, или, как обычно,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

если из контекста ясно, в каком смысле понимается сходимость.

Аналогично определяется сходимость по L_1-норме и по C-норме. Функциональный ряд называется сходящимся по некоторой норме, если последовательность его частичных сумм по этой норме сходится.

7.2. Неравенство Бесселя и свойство минимальности коэффициентов Фурье. Рассмотрим систему функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{1}$$

каждая из которых определена на промежутке Δ, принадлежит пространству $L_2^R(\Delta)$ и, кроме того, такая, что $\|\varphi_n\| \neq 0 \quad \forall n$, где $\|\varphi_n\|$ — норма в $L_2^R(\Delta)$ функции φ_n.

Предположим, что система (1) ортогональна на промежутке Δ, и рассмотрим разность

$$f(x) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k(x),$$

где $f(x) \in L_2^R(\Delta)$, а $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — некоторые числа.

Имеем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right) =$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\beta_k}(f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overline{\beta_k} (\varphi_k, \varphi_k).$$

А так как $(f, \varphi_k) = a_k \|\varphi_k\|^2$, где a_k — k-й коэффициент Фурье функции f по ортогональной системе (1), то получаем:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_k \overline{\beta_k} - \overline{\beta_k} a_k - \beta_k \overline{a_k} \right) \|\varphi_k\|^2. \quad (2)$$

Теорема. *Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_2^R(\Delta)$ по ортогональной системе* (1), *то*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \quad \forall n, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2, \quad (4)$$

$$\min_{\beta_1, \ldots, \beta_n} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\|. \quad (5)$$

Доказательство. Равенство (3) следует из (2) при $\beta_k = a_k$. Далее, из (3) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ получаем неравенство (4).

Для доказательства свойства (5) заметим, что из (2) следует, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - \beta_k|^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Поэтому, учитывая равенство (3), получаем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \right\|^2 \geqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\|^2.$$

Теорема доказана.

Неравенство (4) называется *неравенством Бесселя*, а свойство (5) — *свойством минимальности коэффициентов Фурье.*

7.3. Полные системы в пространстве интегрируемых с квадратом функций. Как обычно, система функций $\{\varphi_k\}$ называется *полной в пространстве* $L_2^R(\Delta)$, если для любой функции $f \in L_2^R(\Delta)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$ функций этой системы, для которой

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|_{L_2(\Delta)} < \varepsilon.$$

Построение полных в $L_2^R(\Delta)$ систем функций основано на следующей лемме.

Лемма. *Если функция f интегрируема с квадратом на отрезке $\Delta = [a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, $x \in \Delta$, такая, что*

$$\|f - \varphi\|_{L_2(\Delta)} < \varepsilon \tag{1}$$

и, кроме того, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Доказательство. Согласно определению функций из $L_2^R(\Delta)$, для любого $\eta > 0$ существует измеримое множество $g_\eta \subset \Delta$, на котором функция $f \in L_2^R(\Delta)$ интегрируема по Риману и для которого справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Delta} |f(x)|^2 dx - \int\limits_{g_\eta} |f(x)|^2 dx < \eta.$$

Через $\psi_\eta(x)$ обозначим ограниченную функцию, равную $f(x)$ на g_η и нулю вне g_η. Тогда, очевидно,

$$\int_\Delta |f(x) - \psi_\eta(x)|^2 dx = \int_{\Delta \setminus g_\eta} |f(x)|^2 dx < \eta. \tag{2}$$

Согласно лемме из п. 6.5, для любого $\delta > 0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, $x \in \Delta$, такая, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ и

$$\int_\Delta |\psi_\eta(x) - \varphi(x)|\, dx < \delta. \tag{3}$$

Через M_η обозначим $\sup |\psi_\eta(x)|$. Из доказательства леммы в п. 6.5, следует, что

$$\sup_{x\in\Delta} |\varphi(x)| \leqslant M_\eta.$$

Теперь из (2) и (3) получаем

$$\|f - \varphi\|_{L_2(\Delta)} \leqslant \|f - \psi_\eta\|_{L_2(\Delta)} + \|\psi_\eta - \varphi\|_{L_2(\Delta)} <$$
$$< \sqrt{\eta} + \left(\int_\Delta 2M_\eta |\psi_\eta(x) - \varphi(x)|\, dx\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\eta} + \sqrt{2M_\eta \delta}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ сначала выберем η так, чтобы $\sqrt{\eta} < \varepsilon/2$. Затем для этого η выберем δ так, чтобы $\sqrt{2M_\eta\delta} < \varepsilon/2$. В результате функция φ будет удовлетворять неравенству (1). Лемма доказана.

Теорема 1. *Тригонометрическая система полна в пространстве $L_2^R(\Delta)$, где $\Delta = [-\pi; \pi]$.*

Доказательство. Пусть $f \in L_2^R(\Delta)$. Из доказанной леммы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $\varphi(x)$, $x \in \Delta$, такая, что $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$ и

$$\|f - \varphi\|_{L_2(\Delta)} < \varepsilon.$$

А из теоремы Вейерштрасса следует, что существует тригонометрический многочлен $\tau(x)$ такой, что

$$|\varphi(x) - \tau(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \Delta.$$

Поэтому для этого многочлена $\tau(x)$ имеем

$$\|f - \tau\|_{L_2(\Delta)} \leqslant \|f - \varphi\|_{L_2(\Delta)} + \|\varphi - \tau\|_{L_2(\Delta)} < \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi}.$$

Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого отрезка $\Delta = [a; b]$ система функций $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ полна в пространстве $L_2^R(\Delta)$.*

В общем случае имеет место следующее утверждение:

Если некоторая система функций на отрезке Δ полна в $C(\Delta)$, то она полна и в $L_2^R(\Delta)$.

Докажите это в качестве упражнения.

7.4. Ряды Фурье интегрируемых с квадратом функций. Как мы уже знаем, для любой функции $f \in L_2^R(\Delta)$, где Δ — некоторый промежуток, можно построить ряд Фурье по любой ортогональной на Δ системе функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{1}$$

у которой $\|\varphi_n\|_{L_2(\Delta)} \neq 0 \ \forall n$.

Теорема 1. *Ряд Фурье функции $f \in L_2^R(\Delta)$ по ортогональной системе (1) сходится по L_2-норме (в среднем) тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2, \tag{2}$$

где a_k — k-й коэффициент Фурье функции f по системе (1).

Доказательство. В п. 7.2 было получено равенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \quad \forall n, \tag{3}$$

из которого и следует наше утверждение.

Равенство (2) называется *равенством Парсеваля.* В случае, когда система (1) ортонормирована на Δ, оно принимает наиболее простой вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|^2.$$

Теорема 2. *Если ортогональная система функций (1) полна в $L_2^R(\Delta)$, то ряд Фурье любой функции f из $L_2^R(\Delta)$ сходится к ней по L_2-норме.*

Доказательство. Так как система (1) полна в $L_2^R(\Delta)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} c_k \varphi_k$ функций (1) такая, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Отсюда и из свойств минимальности коэффициентов Фурье следует, что неравенство (4) заведомо выполняется, если $c_k = a_k$, где a_k — k-й коэффициент Фурье функции f по системе (1). Наконец, из (3) и (4) при $c_k = a_k$ получаем:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon.$$

А это и означает, что ряд Фурье функции f сходится к f по L_2-норме. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Тригонометрический ряд Фурье любой функции $f \in L_2^R(\Delta)$, где $\Delta = [-\pi; \pi]$, сходится к ней по L_2-норме, т.е.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad \text{в} \qquad L_2(\Delta),$$

и, кроме того, справедливо равенство Парсеваля:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \pi = \|f\|^2.$$

Для рядов Фурье в комплексной форме имеем:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x} \qquad \text{в} \qquad L_2(-\pi; \pi),$$

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_\nu|^2.$$

Следствие 2. *Ряд Фурье любой функции $f \in L_2^R(\Delta)$, где $\Delta = [-1; 1]$, по системе полиномов Лежандра сходится к ней по L_2-норме.*

Теорема 3. *Если непрерывная 2π-периодическая функция $f(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$ имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x) \in L_2^R(\Delta)[-\pi; \pi]$, то ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней равномерно (по C-норме) на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}.$$

Как известно, в рассматриваемом случае

$$c_\nu = \frac{1}{\nu} c'_\nu \quad \forall \nu \neq 0.$$

По теореме о сходимости ряда Фурье в точке, ряд Фурье данной функции f сходится к $f(x)$ на $(-\pi; \pi)$, кроме, может быть, конечного числа точек. Поэтому

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{k} |c'_k| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |c'_k|^2 \right)^{1/2} < \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \alpha_n$$

для любого $x \in [-\pi; \pi]$, кроме, может быть, конечного числа точек. А так как в этом неравенстве все функции непрерывны на $\mathbb{R}$, то имеем:

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x} \right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \alpha_n \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема 3 доказана.

Глава 15

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1.1. Понятие интеграла, зависящего от параметра. Пусть A — некоторое множество элементов α произвольной природы. Тогда, если задано правило, по которому каждому $\alpha \in A$ ставится в соответствие некоторая функция $\varphi_\alpha(x)$, $x \in G_\alpha$, то говорят, что задано *семейство функций* φ_α, $\alpha \in A$, зависящих от параметра α.

В общем случае функции $\varphi_\alpha(x)$ могут иметь совершенно произвольную природу. В этой главе будем рассматривать лишь случай, когда $\varphi_\alpha(x)$ — это числовые функции точки $x \in G_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Более того, будем считать, что каждая функция φ_α в каком-то смысле интегрируема на множестве G_α. Тогда функция

$$J(\alpha) = \int\limits_{G_\alpha} \varphi_\alpha(x)\, dx \tag{1}$$

параметра $\alpha \in A$ называется *интегралом, зависящим от параметра* α. Причем, если при каждом $\alpha \in A$ интеграл (1) является собственным, то $J(\alpha)$ называют *собственным интегралом, зависящим от параметра* α. Если же при всех или при некоторых $\alpha \in A$ интеграл (1) является несобственным, то $J(\alpha)$ называют *несобственным интегралом, зависящим от параметра* α. Это разделение является условным, и, как будет видно из дальнейшего, оно связано лишь с методами исследования таких интегралов.

Природа множества A значений параметра α может быть самой разнообразной, однако важнейшим является случай, когда A — это некоторое множество действительных или комплексных чисел или точек n-мерного пространства. Основное внимание мы уделим интегралам, зависящим от параметра, в которых множества A и G являются промежутками числовой прямой $\mathbb{R}$. Более того, сначала будем считать, что промежуток G_α не зависит от параметра α. В этом случае семейство функций $\varphi_\alpha(x)$, $x \in \Delta$, зависящих от параметра $\alpha \in A$, можно рассматривать как функцию двух переменных $f(x, \alpha) = \varphi_\alpha(x)$, заданную на множестве $\Delta \times A$.

Таким образом, начнем с рассмотрения интегралов вида

$$J(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in A.$$

В заключение отметим, что интегралы, зависящие от параметра, возникают во многих задачах физики и математики, и поэтому изучение их является интересным и полезным.

1.2. Теоремы о предельном переходе, интегрировании и дифференцировании под знаком интеграла. В этом пункте рассмотрим интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

когда пределы интегрирования a и b конечные, параметр y меняется на отрезке $[c; d]$, а функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на замкнутом прямоугольнике $\Delta = [a; b] \times [c; d]$.

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta = [a; b] \times [c; d]$, то функция* (1) *непрерывна на отрезке $[c; d]$.*

Доказательство. Для любых y и y_0 из $[c; d]$ справедливо неравенство

$$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| \leqslant (b - a) \sup_{x \in [a; b]} |f(x, y) - f(x, y_0)|.$$

Из непрерывности функции $f(x, y)$ на компакте Δ следует ее равномерная непрерывность, поэтому

$$\sup_{x \in [a; b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad y \to y_0.$$

Теорема 1 доказана.

Эту теорему можно сформулировать как *теорему о предельном переходе под знаком интеграла.*

Теорема 1′. *Если $f(x, y)$ непрерывна на Δ, то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx \quad \forall\, y_0 \in [c; d].$$

Из теоремы о сведении кратного интеграла к повторному следует *теорема об интегрировании под знаком интеграла.*

Теорема 2. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta = [a;b] \times [c;d]$, то*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Как следствие этой теоремы получим *теорему о дифференцировании под знаком интеграла.*

Теорема 3. *Если функция $f(x,y)$ и ее производная $f'_y(x,y)$ непрерывны на Δ, то функция (1) непрерывно дифференцируема на $[c;d]$ и*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx. \qquad (2)$$

Доказательство. Применяя теорему 2 к функции $f'_t(x,t)$, $(x,t) \in [a;b] \times [c;y]$, получаем:

$$\int\limits_c^y dt \int\limits_a^b f'_t(x,t)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y f'_t(x,t)\,dt = \Phi(y) - \Phi(c).$$

По теореме 1 функция $\int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$ непрерывна на отрезке $[c;d]$.

Следовательно, функция $\Phi(y)$ непрерывно дифференцируема на $[c;d]$, и справедлива формула (2). Теорема 3 доказана.

Пример. Применив формулу (2), вычислим интеграл

$$F(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(y^2 - \sin^2 x\right) dx, \quad y > 1. \qquad (3)$$

Здесь в окрестности любой точки $y > 1$ выполнены все условия теоремы 3, поэтому

$$F'(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2y\,dx}{y^2 - \sin^2 x}.$$

Заменой $\xi = \operatorname{tg} x$ полученный интеграл легко вычисляется:

$$F'(y) = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Следовательно,

$$F(y) = \pi \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) + C, \tag{4}$$

где C — некоторая постоянная.

Чтобы найти постоянную C, воспользуемся асимптотиками функции $F(y)$ при $y \to +\infty$, которые получаются из формул (3) и (4).

Из формулы (3) получаем:

$$F(y) = \pi \ln y + \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dx.$$

А так как

$$\left|\ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)\right| \leqslant \left|\ln\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)\right| \to 0$$

при $y \to +\infty$, то $F(y) = \pi \ln y + o(1)$ при $y \to +\infty$. С другой стороны, из формулы (4) следует, что

$$F(y) = \pi \ln y + \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}\right) + C = \pi \ln y + \pi \ln 2 + C + o(1)$$

при $y \to +\infty$. Поэтому $\pi \ln 2 + C = 0$ и, следовательно,

$$F(y) = \pi \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

1.3. Некоторые обобщения. В этом пункте рассмотрим интегралы вида

$$\Phi(y) = \int\limits_G f(x, y) g(x)\, dx, \tag{1}$$

когда G — измеримая область точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, параметр y меняется на отрезке $[c; d]$, функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на замыкании множества $G \times [c; d]$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на G.

Отметим, что в общем случае интеграл (1) является несобственным. Он сходится при любом $y \in [c; d]$, так как функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте $\overline{G} \times [c; d]$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на G.

Теорема 1. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на компакте $\overline{G} \times [c;d]$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на G, то функция* (1) *непрерывна на отрезке $[c;d]$.*

Доказательство. Для любых y и y_0 из $[c;d]$ справедливо неравенство

$$|\Phi(y) - \Phi(y_0)| \leqslant \sup_{x\in G} |f(x,y) - f(x,y_0)| \int\limits_G |g(x)|\,dx,$$

из которого, как и в теореме 1 из п. 1.2, следует, что $\lim\limits_{y\to y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если функция $f(x,y)$ на компакте $\overline{G} \times [c;d]$ непрерывна и имеет непрерывную производную $f'_y(x,y)$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на G, то функция* (1) *непрерывно дифференцируема на $[c;d]$ и*

$$\Phi'(y) = \int\limits_G f'_y(x,y)g(x)\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $y \in [c;d]$ и $y+h \in [c;d]$. Тогда существует $\theta \in (0;1)$ такое, что

$$f(x,y+h) - f(x,y) = f'_y(x,y+\theta h)\cdot h,$$

и поэтому если $\Delta\Phi = \Phi(y+h) - \Phi(y)$, то

$$\frac{\Delta\Phi}{h} = \int\limits_G f'_y(x,y+\theta h)g(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{h} - \int\limits_G f'_y(x,y)g(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x\in G\\ \theta\in(0;1)}} |f'_y(x,y+\theta h) - f'_y(x,y)| \int\limits_G |g(x)|\,dx.$$

Здесь правая часть стремится к нулю при $h\to 0$, так как функция $f'_y(x,y)$ равномерно непрерывна на компакте $\overline{G}\times[c;d]$. Поэтому

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\Phi}{h} = \int\limits_G f'_y(x,y)g(x)\,dx.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на компакте $\overline{G} \times [c;d]$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на G, то*

$$\int_c^d \Phi(y)\,dy = \int_G \left(\int_c^d f(x,y)g(x)\,dy \right) dx. \qquad (3)$$

Доказательство. Функция

$$\varphi(u) = \int_c^u \left(\int_G f(x,y)g(x)\,dx \right) dy$$

является интегралом с переменным верхним пределом от непрерывной функции (это следует из теоремы 1). Следовательно,

$$\varphi'(u) = \int_G f(x,u)g(x)\,dx. \qquad (4)$$

Согласно теореме 2, функция

$$\psi(u) = \int_G \left(\int_c^u f(x,y)g(x)\,dy \right) dx$$

непрерывно дифференцируема и

$$\psi'(u) = \int_G f(x,u)g(x)\,dx. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что $\varphi'(u) = \psi'(u)$. А так как $\varphi(c) = \psi(c) = 0$, то $\varphi(u) = \psi(u)$ $\forall u \in [c;d]$. Отсюда при $u = d$ получается равенство (3). Теорема 3 доказана.

1.4. Интегралы с пределами интегрирования, зависящими от параметра. В этом пункте рассмотрим один класс интегралов, у которых область интегрирования зависит от параметра. А именно, рассмотрим интегралы вида

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx, \qquad (1)$$

у которых функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ определены на отрезке $[c;d]$, а функция $f(x,y)$ определена на множестве G точек (x,y), у которых $y \in [c;d]$, а x принадлежит отрезку с концами $\varphi(y)$ и $\psi(y)$. (Здесь возможен как случай $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, так и случай $\varphi(y) \geqslant \psi(y)$.)

Теорема 1. *Если функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c; d]$, а функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве G, то функция* (1) *непрерывна на отрезке* $[c; d]$.

Доказательство. В интеграле (1) сделаем замену

$$x = \varphi(y) + \xi(\psi(y) - \varphi(y)).$$

В результате получим

$$F(y) = (\psi(y) - \varphi(y)) \int_0^1 f^*(\xi, y)\, d\xi, \tag{2}$$

где $f^*(\xi, y) = f(\varphi(y) + \xi(\psi(y) - \varphi(y)), y)$.

Очевидно, функция $f^*(\xi, y)$ определена и непрерывна на замкнутом прямоугольнике $[0; 1] \times [c; d]$, и поэтому непрерывность функции $F(y)$ следует из теоремы 1 пункта 1.2. Теорема 1 доказана.

Если предположить, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на прямоугольнике $\Delta = [a; b] \times [c; d]$, содержащем множество G, то можно доказать более общее утверждение.

Теорема 2. *Если функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c; d]$, функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике Δ, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[a; b]$, то функция*

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) g(x)\, dx$$

непрерывна на отрезке $[c; d]$.

Доказательство. При сделанных предположениях легко видеть, что функция

$$\Phi_0(y, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x, y) g(x)\, dx$$

непрерывна на множестве $[c; d] \times \Delta$. (Докажите это утверждение в качестве упражнения.) А так как $\Phi(y) = \Phi_0(y, \varphi(y), \psi(y))$, то функция $\Phi(y)$ непрерывна как композиция непрерывных функций. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если функция $f(x, y)$ на прямоугольнике Δ непрерывна и имеет непрерывную производную $f'_y(x, y)$, а функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[c; d]$, то*

функция (1) *непрерывно дифференцируема на* $[c; d]$ *и справедлива формула*

$$F'(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y). \quad (3)$$

Она называется *формулой Лейбница.*

Доказательство. При сделанных предположениях функция

$$F_0(y, \xi, \eta) = \int\limits_{\xi}^{\eta} f(x, y)\,dx$$

имеет непрерывные производные первого порядка по всем переменным. А так как

$$F(y) = F_0(y, \varphi(y), \psi(y)), \quad (4)$$

то функция $F(y)$ непрерывно дифференцируема как композиция непрерывно дифференцируемых функций, а формула (3) получается по правилу дифференцирования сложной функции (4). Теорема 3 доказана.

В конце заметим, что формула Лейбница остается справедливой и для функций $f(x, y)$, которые определены только на множестве G. Например, если дополнительно предположить, что функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема на G, то формула (3) получается просто дифференцированием функции (2). (Конечно, после некоторых преобразований.) Соответствующие выкладки предлагается провести читателю в качестве легкого упражнения.

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

2.1. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов. Пусть функция $f(x, y)$, определенная на множестве $[a; b) \times Y$, при каждом значении $y \in Y$ интегрируема по x на промежутке $[a; b)$ в собственном или несобственном смысле, и, следовательно, определена функция

$$\Phi(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x, y)\,dx, \quad y \in Y. \quad (1)$$

Для определенности будем считать, что интеграл (1) при каждом $y \in Y$ может иметь единственную особенность, связанную с верхним пределом интегрирования, т.е. будем предполагать, что при каждом $y \in Y$ функция $f(x; y)$ по x интегрируема по Риману на

любом отрезке $[a;\eta] \subset [a;b)$. Следовательно, в интеграле (1) или $b = +\infty$, или (в случае конечного b) функция $f(x,y)$ при некоторых $y \in Y$ как функция от x является неограниченной в окрестности точки $x = b$. В этом случае будем говорить, что при каждом $y \in Y$ для функции $f(x,y)$ только точка b может быть особой.

Определение. Пусть для функции $f(x,y)$, определенной на множестве $[a;b) \times Y$, при каждом $y \in Y$ только точка b может быть особой. Тогда интеграл (1), зависящий от параметра y, называется *равномерно сходящимся на множестве* Y, если он сходится при любом $y \in Y$ и, кроме того,

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_{\eta}^{b} f(x,y)\,dx \right| \to 0.$$

при $\eta \to b$.

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx$ от функции

$$f(x,y) = (2 - xy)xye^{-xy}.$$

Легко видеть, что функция $F(x,y) = x^2ye^{-xy}$ такая, что $F'_x(x,y) = f(x,y)$, и поэтому

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = 0 \quad \forall y > 0.$$

Согласно определению, для исследования данного интеграла на равномерную сходимость по y нужно рассмотреть интеграл по x от $\xi > 0$ до $+\infty$. Очевидно,

$$\int_{\xi}^{+\infty} f(x,y)\,dx = -\xi^2ye^{-\xi y}.$$

Функция $\varphi_\xi(y) = \xi^2ye^{-\xi y}$ на интервале $(0;+\infty)$ наибольшее значение принимает в точке $y = 1/\xi$. Следовательно,

$$\sup_{y>0} \left| \int_{\xi}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| = \xi e^{-1} \to +\infty$$

при $\xi \to +\infty$, и поэтому данный интеграл сходится неравномерно по y на интервале $(0;+\infty)$.

На любом интервале $(\delta; +\infty)$, $\delta > 0$, данный интеграл сходится равномерно по y. Действительно, если $\xi > \frac{1}{\delta}$, то

$$\sup_{y>\delta}\left|\int\limits_{\xi}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| = \xi^2\delta e^{-\delta\xi},$$

а это выражение стремится к нулю при $\xi \to +\infty$.

Теорема 1. *Если существует функция $F(x)$ такая, что*

$$|f(x,y)| \leqslant F(x) \quad \forall\,(x,y) \in [a;b) \times Y,$$

и интеграл от $F(x)$ на $[a;b)$ сходится, то интеграл (1) сходится на Y равномерно и абсолютно.

Действительно, при любом $y \in Y$ интеграл (1) сходится и, кроме того,

$$\sup_{y}\int\limits_{\eta}^{b} |f(x,y)|\,dx \leqslant \int\limits_{\eta}^{b} F(x)\,dx \to 0$$

при $\eta \to b$.

Это утверждение называется *признаком Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла.*

Пример 2. *Интеграл Лапласа* $J(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$ по признаку Вейерштрасса сходится равномерно и абсолютно на $\mathbb{R}$, так как

$$\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

и интеграл от функции $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ сходится.

Теорема 2. *Для того, чтобы интеграл (1) сходился равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\eta_\varepsilon \in (a;b):\ \forall\,\xi,\eta \in (\eta_\varepsilon;b)\ \left|\int\limits_{\xi}^{\eta} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon\ \forall\,y \in Y. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть интеграл (1) сходится равномерно на Y. Тогда он сходится на Y и выполняется условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon \in (a; b): \quad \forall \eta \in (\eta_\varepsilon; b) \quad \sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если $\xi \in (\eta_\varepsilon; b)$ и $\eta \in (\eta_\varepsilon; b)$, то

$$\forall y \in Y \quad \left| \int_\xi^\eta f(x, y)\, dx \right| \leqslant \left| \int_\xi^b f(x, y)\, dx \right| + \left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Необходимость условия (2) для равномерной сходимости интеграла (1) на множестве Y доказана. Докажем достаточность.

Из условия (2) следует, что интеграл (1) сходится на Y. Тогда из (2) в пределе при $\eta \to b$ получаем

$$\forall \xi \in (\eta_\varepsilon; b) \quad \forall y \in Y \quad \left| \int_\xi^b f(x, y)\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 2 доказана.

Эта теорема называется *критерием Коши*, а условие (2) — *условием Коши равномерной сходимости интеграла* (1).

Теорема 3. *Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ при любом фиксированном $y \in Y$ интегрируемы по x-на любом отрезке $[a; \eta]$, $\eta > a$. Тогда, если функция*

$$\Phi(x, y) = \int_a^x f(t, y)\, dt$$

ограничена на множестве $[a; +\infty) \times Y$, а функция $g(x, y)$ по x монотона при каждом $y \in Y$ и такая, что $g(x, y) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно по $y \in Y$, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y)\, dx \tag{3}$$

сходится равномерно на множестве Y.

Доказательство. Прежде всего отметим, что по признаку Дирихле интеграл (3) сходится при любом $y \in Y$. Как и при доказательстве этого признака (см. п. 4.4 гл. 7), если $|\Phi(x, y)| \leqslant C$, то, используя вторую теорему о среднем, для любых ξ и η, больших a, и любого $y \in Y$ получаем неравенство

$$\left|\int\limits_{\xi}^{\eta} f(x, y)g(x, y)\,dx\right| \leqslant 2C\left(|g(\eta, y)| + |g(\xi, y)|\right),$$

из которого следует, что интеграл (3) удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости, и поэтому он сходится равномерно на множестве Y. Теорема 3 доказана.

Она называется *признаком Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла.*

Пример 3. Исследуем на равномерную сходимость *интеграл Дирихле*:

$$I(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Прежде всего отметим, что этот интеграл сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Действительно, для $\alpha = 0$ это очевидно, а для $\alpha \neq 0$ выполнены все условия признака Дирихле сходимости интеграла. Тогда, если $\alpha \neq 0$, то

$$\forall \eta > 0 \quad \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = -\left.\frac{\cos \alpha x}{\alpha x}\right|_{\eta}^{+\infty} - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2}\,dx$$

и, следовательно,

$$\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{|\alpha|\eta} + \frac{1}{|\alpha|}\cdot\frac{1}{\eta} = \frac{2}{|\alpha|\cdot\eta}.$$

Поэтому интеграл (4) сходится равномерно по α на любом промежутке вида $(-\infty; -\delta]$ или $[\delta; +\infty)$, где $\delta > 0$.

В окрестности точки $\alpha = 0$ интеграл (4) сходится неравномерно. А именно, на любом интервале $(0; \delta)$ он не сходится равномерно. Действительно,

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int\limits_{\alpha\xi}^{\alpha\eta} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

для любых ξ, η и $\alpha > 0$.

Для каждого $\xi > 0$ выберем $\alpha > 0$ и $\eta > \xi$ так, чтобы $\sin t > 0$ $\forall t \in [\alpha\xi; \alpha\eta]$. Например, α и η найдем из условий

$$\alpha\xi = \frac{\pi}{6}, \quad \alpha\eta = \frac{\pi}{2},$$

т. е. положим $\alpha = \alpha_\xi = \dfrac{\pi}{6\xi}$, $\eta = 3\xi$. Тогда для любого $\xi > \dfrac{\pi}{6\delta}$ $\alpha_\xi \in (0;\delta)$ и

$$\int\limits_{\xi}^{3\xi} \frac{\sin \alpha_\xi x}{x}\,dx = \int\limits_{\pi/6}^{3\pi/6} \frac{\sin t}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}.$$

А это означает, что на интервале $(0;\delta)$ для интеграла (4) не выполняется условие Коши равномерной сходимости по α.

Пример 4. Исследуем на равномерную сходимость *интеграл Лапласа*

$$f(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Он сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$: для $\alpha = 0$ это очевидно, а для $\alpha \neq 0$ выполнены все условия признака Дирихле сходимости интеграла. Тогда, если $\alpha \neq 0$, то, как и в примере 3, получаем неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{|\alpha|}\cdot\frac{\eta}{1+\eta^2}.$$

Из него следует, что интеграл (5) сходится равномерно по α на любом промежутке вида $(-\infty; -\delta]$ или $[\delta; +\infty)$, где $\delta > 0$.

На любом интервале $(0;\delta)$ интеграл (5) не сходится равномерно. Действительно,

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_{\alpha\xi}^{\alpha\eta} \frac{t \sin t}{\alpha^2+t^2}\,dt$$

для любых ξ, η и $\alpha > 0$. Для каждого $\xi > 0$ выберем $\alpha > 0$ и $\eta > \xi$ так, чтобы на отрезке $[\alpha\xi; \alpha\eta]$ функция $\sin t$ принимала только положительные значения. Например, α и η найдем из условий $\alpha\xi = 1$, $\alpha\eta = 2$, т.е.

положим $\alpha = \alpha_\xi = \dfrac{1}{\xi}$, $\eta = 2\xi$. Тогда для любого $\xi > \dfrac{1}{\delta}$ $\alpha_\xi \in (0;\delta)$ и

$$\int\limits_{\xi}^{2\xi} \frac{x\sin\alpha_\xi x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_1^2 \frac{t\sin t}{\alpha_\xi^2+t^2}\,dt \geqslant \int\limits_1^2 \frac{t\sin t}{\delta^2+t^2}\,dt > 0.$$

А это означает, что на интервале $(0;\delta)$ для интеграла (5) не выполняется условие Коши равномерной сходимости по α.

Замечание. Многие задачи сводятся к исследованию интегралов вида

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx, \quad y \in Y, \tag{6}$$

где при каждом $y \in Y$ для функции $f(x,y)$ только точка $x = b$ может быть особой, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a;\eta] \subset [a;b)$.

Как и выше, интеграл (6), зависящий от параметра y, называется равномерно сходящимся на множестве Y, если он сходится при любом $y \in Y$ и, кроме того,

$$\lim_{\eta\to b}\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_\eta^b f(x,y)g(x)\,dx\right| = 0.$$

Легко видеть, что для интегралов вида (6) справедливы как признак Вейерштрасса, так и критерий Коши равномерной сходимости.

2.2. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Для общности будем рассматривать интегралы вида

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx, \tag{1}$$

определенные в конце предыдущего пункта.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a;b) \times [c;d]$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a;\eta] \subset [a;b)$. Тогда, если интеграл (1) сходится равномерно по y на отрезке $[c;d]$, то функция $\Phi(y)$ непрерывна на $[c;d]$ и, кроме того,*

$$\int\limits_c^d \Phi(y)\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)g(x)\,dy. \tag{2}$$

Доказательство. Так как интеграл (1) сходится равномерно по y на отрезке $[c;d]$, то

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\eta_\varepsilon:\quad\left|\int\limits_{\eta_\varepsilon}^{b}f(x,y)g(x)\,dx\right|<\varepsilon\quad\forall\,y\in[c;d].$$

Поэтому для любых y и y_0 из $[c;d]$ имеем:

$$|\Phi(y)-\Phi(y_0)|<\left|\int\limits_a^{\eta_\varepsilon}f(x,y)g(x)\,dx-\int\limits_a^{\eta_\varepsilon}f(x,y_0)g(x)\,dx\right|+2\varepsilon.\quad(3)$$

Из теоремы о непрерывности собственных интегралов (см. п. 1.2) следует, что первое слагаемое в правой части неравенства (3) стремится к нулю при $y\to y_0$. Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\quad\forall y\in O_\delta(y_0)\cap[c;d]\quad|\Phi(y)-\Phi(y_0)|<3\varepsilon.$$

Непрерывность функции $\Phi(y)$ доказана. Докажем, что

$$\lim_{\eta\to b}\int\limits_a^{\eta}dx\int\limits_c^{d}f(x,y)g(x)\,dy=\int\limits_c^{d}\Phi(y)\,dy.\quad(4)$$

Согласно теореме об интегрировании под знаком интеграла для собственных интегралов, в выражении, стоящем под знаком предела в равенстве (4), можно поменять порядок интегрирования. Поэтому

$$\left|\int\limits_a^{\eta}dx\int\limits_c^{d}f(x,y)g(x)\,dy-\int\limits_c^{d}dy\int\limits_a^{b}f(x,y)g(x)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int\limits_c^{d}dy\int\limits_\eta^{b}f(x,y)g(x)\,dx\right|\leqslant(d-c)\sup_y\left|\int\limits_\eta^{b}f(x,y)g(x)\,dx\right|\to0$$

при $\eta\to0$. Теорема 1 доказана.

Следующий пример показывает, что условие равномерной сходимости интеграла (1) существенно для справедливости равенства (2).

Пример 1. В п. 2.1 (см. пример 1) было показано, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}f(x,y)\,dx$ от функции $f(x,y)=(2-xy)xy\,e^{-xy}$ сходится неравномерно относительно y на отрезке $[0;1]$.

Для этой функции имеем:

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = 0 \quad \forall y \geqslant 0, \qquad \int_0^1 f(x,y)\,dy = xy^2e^{-xy}\Big|_0^1 = xe^{-x},$$

Следовательно,

$$\int_0^1 dy \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = 0, \qquad \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = 1.$$

Заметим, что теорема 1 объединяет два утверждения: теорему о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра, и теорему об интегрировании под знаком интеграла. Докажем еще теорему о дифференцировании под знаком интеграла.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x,y)$ *на множестве* $[a;b) \times [c;d]$ *непрерывна и имеет непрерывную производную* $f'_y(x,y)$, *а функция* $g(x)$ *абсолютно интегрируема на любом отрезке* $[a;\eta] \subset [a;b)$. *Тогда, если на* $[c;d]$ *интеграл* (1) *сходится, а интеграл* $\int\limits_a^b f'_y(x,y)g(x)\,dx$ *сходится равномерно, то функция* $\Phi(y)$ *непрерывно дифференцируема на* $[c;d]$ *и*

$$\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)g(x)\,dx. \tag{5}$$

Доказательство. По формуле 2 для любого $y \in [c;d]$ имеем:

$$\int_c^y dt \int_a^b f'_t(x,t)g(x)\,dt = \Phi(y) - \Phi(c).$$

Здесь интеграл, стоящий слева, имеет непрерывную производную по y, равную $\int\limits_a^b f'_y(x,y)g(x)\,dx$. Следовательно, функция $\Phi(y)$ имеет непрерывную производную, и справедлива формула (5). Теорема 2 доказана.

2.3. Вычисление некоторых интегралов.

1. *Интеграл Дирихле*: $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Этот интеграл сходится при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, причем $I(0) = 0$ и $I(-\alpha) = -I(\alpha)$. Кроме того, сделав замену $\alpha x = \xi$, видим, что $I(\alpha) = I(1)$ для любого $\alpha > 0$. Таким образом, достаточно вычислить интеграл (1) при $\alpha = 1$. Для этого рассмотрим интеграл

$$J(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x}\,dx, \quad \beta \geqslant 0.$$

По признаку Дирихле этот интеграл сходится равномерно по β на промежутке $[0; +\infty)$. На интервале $(0; +\infty)$ этот интеграл можно дифференцировать под знаком интеграла, так как интеграл от производной сходится равномерно по β на любом отрезке $[a; b] \subset \subset (0; +\infty)$. Следовательно,

$$J'(\beta) = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-\beta x}\,dx.$$

Интегрированием по частям находим:

$$J'(\beta) = -\frac{1}{1+\beta^2} \quad \forall \beta > 0.$$

На промежутке $[0; +\infty)$ функция $J(\beta)$ непрерывна, поэтому

$$J(\beta) - J(0) = -\operatorname{arctg} \beta \quad \forall \beta > 0. \tag{1}$$

Из этого равенства следует, что предел функции $J(\beta)$ при $\beta \to +\infty$ существует, а из неравенства

$$|J(\beta)| \leqslant \delta + \int\limits_\delta^{+\infty} e^{-x\beta}\,dx = \delta + \frac{1}{\beta} e^{-\delta\beta}$$

при $\delta > 0$ следует, что $\lim\limits_{\beta \to +\infty} |J(\beta)| \leqslant \delta \;\; \forall \delta > 0$. Поэтому $J(\beta) \to 0$ при $\beta \to +\infty$. Отсюда и из равенства (1) получаем $J(0) = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ при $\alpha > 0$, и поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha.$$

2. *Интеграл Лапласа*: $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Этот интеграл сходится равномерно по α на $\mathbb{R}$, причем

$$F(0) = \frac{\pi}{2}, \quad F(-\alpha) = F(\alpha).$$

На интервале $(0; +\infty)$ этот интеграл можно дифференцировать под знаком интеграла, так как интеграл от производной сходится равномерно по α на любом отрезке $[a; b] \subset (0; +\infty)$. Следовательно,

$$F'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{-x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Преобразуем этот интеграл с помощью интеграла Дирихле при $\alpha > 0$:

$$F'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{-x}{1+x^2} + \frac{1}{x} \right) \sin \alpha x\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx \quad (2)$$

и снова продифференцируем по α. В результате для $F(\alpha)$ получим дифференциальное уравнение $F''(\alpha) = F(\alpha)$. Его общее решение имеет вид $F(\alpha) = C_1 e^{-\alpha} + C_2 e^{\alpha}$, где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. А так как $F(0) = \pi/2$, то

$$C_1 + C_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Далее, из (2) в пределе при $\alpha \to +0$ находим:

$$-C_1 + C_2 = F'(+0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, если $\alpha > 0$, то $F(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$, и поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.4. О перестановке двух несобственных интегралов. Прежде чем формулировать теорему о перестановке двух несобственных интегралов, докажем одно вспомогательное утверждение о предельном переходе под знаком интеграла.

Лемма. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a;b)\times[c;d)$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a;\xi]\subset[a;b)$. Тогда, если интеграл*

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x,y)g(x)\,dx \qquad (1)$$

сходится равномерно по y на любом отрезке $[c;\eta]\subset[c;d)$ и сходится повторный интеграл

$$\int_c^d dy\int_a^b |f(x,y)g(x)|\,dx, \qquad (2)$$

то функция $\Phi(y)$ абсолютно интегрируема на $[c;d)$, для любого $\xi\in(a;b)$ функция

$$\Phi_\xi(y)=\int_a^\xi f(x,y)g(x)\,dx \qquad (3)$$

тоже абсолютно интегрируема на $[c;d)$, и, самое главное, справедливо равенство

$$\lim_{\xi\to b}\int_c^d \Phi_\xi(y)\,dy=\int_c^d \Phi(y)\,dy. \qquad (4)$$

Доказательство. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a;b)\subset[c;d)$, а интегралы (1), (3) сходятся равномерно на любом отрезке $[c;\eta]\subset[c;d)$, то функции $\Phi(y)$ и $\Phi_\xi(y)$ непрерывны на промежутке $[c;d)$. Из неравенства

$$|\Phi_\xi(y)|\leqslant\int_a^b |f(x,y)g(x)|\,dx$$

и сходимости повторного интеграла (2) следует, что для любого $\xi\in(a;b)$ функция $\Phi_\xi(y)$ абсолютно интегрируема на $[c;d)$. Аналогично доказывается, что функция $\Phi(y)$ тоже абсолютно интегрируема на $[c;d)$.

Для доказательства равенства (4) заметим, что

$$\left|\int_c^d \Phi(y)\,dy - \int_c^d \Phi_\xi(y)\,dy\right| \leqslant \int_c^d \left|\int_\xi^b f(x,y)g(x)\,dx\right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_c^\eta \left|\int_\xi^b f(x,y)g(x)\,dx\right| dy + \int_\eta^d dy \int_a^b |f(x,y)g(x)|\,dx \quad (5)$$

для любого $\xi \in (a;b)$ и любого $\eta \in (c;d)$. Из равномерной сходимости интеграла (1) на любом отрезке $[c;\eta] \subset [c;d)$ следует, что

$$\int_c^\eta \left|\int_\xi^b f(x,y)g(x)\,dx\right| dy \leqslant (\eta - c) \sup_{y\in[c;\eta]} \left|\int_\xi^b f(x,y)g(x)\,dx\right| \to 0$$

при $\xi \to b$ для любого $\eta \in (c;d)$.

Выберем некоторую последовательность $\{\xi_n\}$, удовлетворяющую условиям: $\xi_n \in (a;b)\ \ \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = b$. В неравенстве (5) положим $\xi = \xi_n$ и перейдем к пределу при $n \to \infty$. В результате для любого $\eta \in (c;d)$ получим неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\int_c^d \Phi(y)\,dy - \int_c^d \Phi_{\xi_n}(y)\,dy\right| \leqslant \int_\eta^d dy \int_a^b |f(x,y)g(x)|\,dx,$$

у которого левая часть не зависит от η, а правая стремится к нулю при $\eta \to d$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_c^d \Phi(y)\,dy - \int_c^d \Phi_{\xi_n}(y)\,dy\right| = 0,$$

что и доказывает равенство (4). Лемма доказана.

Следующий пример показывает, что сходимость интеграла (2) является существенной для справедливости равенства (4).

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

на множестве $[1;+\infty) \times [1;+\infty)$.

Очевидно,

$$\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \left(- \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_1^{+\infty} \right) dy = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

С другой стороны, для любого $\xi \geqslant 1$ и любого $y \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\int\limits_{\xi}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \frac{\xi}{\xi^2+y^2} \leqslant \frac{1}{\xi}.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно по y на $\mathbb{R}$.

Однако

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{\xi} f(x,y)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} - \lim_{\xi\to+\infty} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\xi}{\xi^2+y^2}\,dy =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \lim_{\xi\to+\infty} \int\limits_{1/\xi}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Для данной функции интеграл (2) расходится. Действительно,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_1^{y} - \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_y^{+\infty} =$$

$$= \frac{y}{2y^2} - \frac{1}{1+y^2} + \frac{y}{2y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y^2},$$

и поэтому

$$\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} |f(x,y)|\,dx = +\infty.$$

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a;b) \times [c;d)$, а функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a;\xi] \subset [a;b)$. Тогда, если интеграл (1) сходится равномерно по y на любом отрезке $[c;\eta] \subset [c;d)$, а интеграл*

$$\Psi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \tag{6}$$

сходится равномерно по x на любом отрезке $[a;\xi] \subset [a;b)$, и, кроме того, сходится повторный интеграл (2), то для функции $f(x,y)\,g(x)$ оба повторных интеграла сходятся и

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)g(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)g(x)\,dy.$$

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что функция $\Phi(y)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[c;d)$. Из непрерывности функции $f(x,y)$ и равномерной сходимости интеграла (6) относительно x на любом отрезке $[a;\xi] \subset [a;b)$ следует, что функция $\Psi(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$. Следовательно, функция $g(x)\Psi(x)$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a;\xi] \subset [a;b)$. Теорема будет доказана, если мы докажем равенство

$$\lim_{\xi\to b} \int\limits_a^\xi g(x)\Psi(x)\,dx = \int\limits_c^d \Phi(y)\,dy. \tag{7}$$

Прежде всего докажем, что

$$\int\limits_a^\xi g(x)\Psi(x)\,dx = \int\limits_c^d \Phi_\xi(y)\,dy \tag{8}$$

Для этого заметим, что для любого $\eta \in (c;d)$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_a^\xi g(x)\Psi(x)\,dx - \int\limits_c^d \Phi_\xi(y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_a^\xi dx \int\limits_\eta^d g(x)f(x,y)\,dy\right| + \left|\int\limits_\eta^d dy \int\limits_a^\xi f(x,y)g(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^\xi |g(x)|\,dx \cdot \sup_{x\in[a;\xi]} \left|\int\limits_\eta^d f(x,y)\,dy\right| + \int\limits_\eta^d dy \int\limits_a^b |f(x,y)g(x)|\,dx.$$

Из условий теоремы следует, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\eta \to b$, что и доказывает равенство (8). А так как все условия леммы выполнены, то из равенств (4) и (8) следует равенство (7). Теорема доказана.

20 Зак. 193

Пример 2. Для функции из примера 2 выполнены все условия, кроме сходимости интеграла (2). Для нее, как уже вычислено выше,

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} f(x,y)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Аналогично вычисляется, что $\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f(x,y)\,dy = -\frac{\pi}{4}.$

Следовательно, сходимость повторного интеграла от $|f(x;y)|$ является существенной для перестановки двух несобственных интегралов.

§ 3. Эйлеровы интегралы

3.1. Определения эйлеровых интегралов. В этом параграфе рассмотрим важные для математики конкретные интегралы, зависящие от параметра:

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{1}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \tag{2}$$

которые называются *эйлеровыми интегралами первого и* соответственно *второго рода*. Функция (1) называется *бета-функцией*, а функция (2) — *гамма-функцией Эйлера*.

Интеграл (1) имеет, вообще говоря, две особые точки: при $x = 0$ и при $x = 1$. Очевидно, он сходится тогда и только тогда, когда $p > 0$ и $q > 0$. Следовательно, функция $\mathrm{B}(p,q)$ определена на множестве $\Delta \times \Delta$, где $\Delta = (0;+\infty)$.

Интеграл (2) на бесконечности сходится при любом α за счет множителя e^{-x}, а в нуле он сходится лишь при $\alpha > 0$. Следовательно, функция $\Gamma(\alpha)$ определена на интервале $\Delta = (0;+\infty)$.

Теорема 1. *Функции $\mathrm{B}(p,q)$ и $\Gamma(\alpha)$ непрерывны в любой точке области определения.*

Доказательство. Функция $f(x,p,q) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ непрерывна на множестве $(0;1)\times\Delta\times\Delta$. Кроме того, для любой точки

$(p_0; q_0) \in \Delta \times \Delta$ выполняется условие: если $p \geqslant \frac{1}{2}p_0$, $q \geqslant \frac{1}{2}q_0$, то

$$f(x,p,q) \leqslant f\left(x, \frac{1}{2}p_0, \frac{1}{2}q_0\right) \quad \forall x \in (0;1).$$

По признаку Вейерштрасса интеграл (1) сходится равномерно по p и q на прямоугольнике $\left[\frac{1}{2}p_0, \frac{3}{2}p_0\right] \times \left[\frac{1}{2}q_0, \frac{3}{2}q_0\right]$, и поэтому на этом прямоугольнике он является непрерывной функцией точки (p, q).

Непрерывность функции $\mathrm{B}(p,q)$ на множестве $\Delta \times \Delta$ доказана. Докажем непрерывность $\Gamma(\alpha)$ на интервале $\Delta = (0; +\infty)$.

Функция $\varphi(x,\alpha) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ непрерывна на множестве $\Delta \times \Delta$. Кроме того, для любого $\alpha_0 > 0$ выполняются условия:

1. если $\alpha \geqslant \frac{1}{2}\alpha_0$, то $\varphi(x,\alpha) \leqslant \varphi\left(x, \frac{\alpha_0}{2}\right) \quad \forall x \in (0;1)$;
2. если $\alpha \leqslant \frac{3}{2}\alpha_0$, то $\varphi(x,\alpha) \leqslant \varphi\left(x, \frac{3}{2}\alpha_0\right) \quad \forall x > 1$.

По признаку Вейерштрасса на отрезке $\left[\frac{1}{2}\alpha_0, \frac{3}{2}\alpha_0\right]$ интегралы

$$\int_0^1 \varphi(x,\alpha)\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \varphi(x,\alpha)\,dx$$

сходятся равномерно. Поэтому на этом отрезке функция (2) непрерывна. Теорема 1 доказана.

Из теоремы о дифференцировании несобственных интегралов по параметру легко получается следующее утверждение.

Теорема 2. *Функции* $\mathrm{B}(p,q)$ *и* $\Gamma(\alpha)$ *бесконечно дифференцируемы, причем для любых* m *и* n *из* $\mathbb{N}$ *справедливы формулы*

$$\frac{\partial^{m+n}\mathrm{B}}{\partial p^m \partial q^n} = \int_0^1 x^{p-1}(\ln x)^m (1-x)^{q-1}(\ln(1-x))^n dx,$$

$$\frac{\partial^n \Gamma}{\partial \alpha^n} = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x} dx.$$

Доказать в качестве упражнения.

3.2. Гамма-функция Эйлера. Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0$$

особенно часто используется в математике и ее приложениях.

Как уже отмечалось, функция $\Gamma(\alpha)$ определена и бесконечно дифференцируема на интервале $\Delta = (0; +\infty)$. Она на Δ принимает лишь положительные значения, причем $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to +0$ и при $\alpha \to +\infty$. А так как

$$\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx > 0$$

на Δ, то функция $\Gamma(\alpha)$ на Δ выпукла вниз и имеет единственный минимум.

Интегрируя по частям, получаем

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = -x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Таким образом, для любого $\alpha > 0$ справедлива формула

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \qquad (1)$$

Она называется *формулой понижения* для гамма-функции.

Из формулы (1) для $\alpha = n \in \mathbb{N}$ следует, что

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\ldots 1 \cdot \Gamma(1).$$

А так как $\Gamma(1) = 1$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Gamma(n+1) = n!$.

Формула (1) позволяет получить асимптотику функции $\Gamma(\alpha)$ при $\alpha \to +0$. Действительно, согласно формуле (1),

$$\lim_{\alpha \to +0} \alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(1) = 1,$$

и поэтому

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad \alpha \to +0.$$

Далее, с помощью формулы (1) функцию $\Gamma(\alpha)$ можно продолжить на интервалы $(-1; 0)$. А именно, положим по определению

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}, \quad \alpha \in (-1; 0).$$

Тогда, в частности,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad \alpha \to -0, \\ \Gamma(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha+1}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad \alpha \to -1+0. \end{aligned}$$

По индукции функцию $\Gamma(x)$ можно определить на любом интервале $(-n; -n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, положив по определению

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}, \quad \alpha \in (-n; -n+1).$$

Отметим еще, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Действительно, делая замену $x = y^2$, находим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

3.3. Бета-функция Эйлера. Как уже отмечалось, бета-функция Эйлера

$$\mathrm{B}(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \tag{1}$$

определена и бесконечно дифференцируема на множестве $\Delta \times \Delta$, где $\Delta = (0; +\infty)$.

Делая замену $x = 1 - t$ в интеграле (1), получаем

$$\mathrm{B}(p, q) = -\int\limits_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \mathrm{B}(q, p).$$

Таким образом, для любых положительных p и q справедлива формула

$$\mathrm{B}(p, q) = \mathrm{B}(q, p). \tag{2}$$

Для бета-функции имеет место *формула понижения*:

$$\mathrm{B}(p+1, q) = \frac{p}{p+q} \mathrm{B}(p, q). \tag{3}$$

Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$B(p+1,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{p}{q}B(p,q) - \frac{p}{q}B(p+1,q),$$

и поэтому $(p+q)B(p+1,q) = pB(p,q)$.

Из (2) и (3) следует и другая формула понижения

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q).$$

Отсюда при $q = n \in \mathbb{N}$ получаем

$$B(p,n+1) = \frac{n}{p+n}B(p,n) = \frac{n}{p+n}\cdot\frac{n-1}{p+n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p+1}B(p,1).$$

А так как $B(p,1) = 1/p$, то

$$B(p,n+1) = \frac{n!}{p(p+1)\ldots(p+n)}.$$

В частности, имеет место формула

$$B(m+1,n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}.$$

Последнее утверждение наводит на мысль, что и в общем случае справедливо равенство

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{4}$$

Для доказательства равенства (4) удобно использовать другое представление бета-функции

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt, \tag{5}$$

которое получается из (1) заменой $x = \dfrac{1}{1+t}$.

Теорема. *Для любых $p>0$ и $q>0$ справедливо равенство* (4).

Доказательство. В интеграле

$$\Gamma(p+q) = \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-x} dx$$

сделаем замену $x = (1+t)y$, где $t > 0$. В результате получим

$$\Gamma(p+q) = (1+t)^{p+q} \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy,$$

$$\Gamma(p+q) \cdot \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} = t^{p-1} \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Проинтегрируем последнее равенство по t от 0 до $+\infty$ и воспользуемся формулой (5). Тогда

$$\Gamma(p+q) \cdot \mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} \left(t^{p-1} \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy \right) dt.$$

При $p > 1$ и $q > 1$ для полученного повторного интеграла выполнены все условия теоремы из п. 2.5 о перестановке двух несобственных интегралов. Поэтому

$$\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} y^{q+p-1} e^{-y} \left(\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty} dt \right) dy.$$

Сделав в последнем интеграле замену $ty = x$, получим

$$\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \right) dy = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

Для $p > 1$ и $q > 1$ формула (4) доказана. Для $p > 0$ и $q > 0$ воспользуемся формулой понижения:

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{p+q}{p} \mathrm{B}(p+1,q) == \frac{(p+q)(p+1+q)}{p \cdot q} \mathrm{B}(p+1,q+1) =$$

$$= \frac{(p+q)(p+1+q)}{p \cdot q} \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Теорема доказана.

3.4. Формулы дополнения. Положив в формуле (5) из п. 3.3 $q = 1 - p$, получим

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену $t = \dfrac{1}{x}$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = -\int_0^1 \frac{x^{-p+1}}{1+x^{-1}} \cdot \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{-p}}{1+x}\,dx.$$

Таким образом, если $p \in (0; 1)$, то

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \int_0^1 \frac{\varphi(x,p)}{1+x}\,dx,$$

где $\varphi(x,p) = x^{p-1} + x^{-p}$. Отсюда и из очевидного тождества

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

следует, что

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k \varphi(x,p)\,dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \varphi(x,p)\,dx. \qquad (1)$$

А так как

$$0 \leqslant x\varphi(x,p) \leqslant 2 \quad \forall x \in (0; 1),$$

то

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \varphi(x,p)\,dx \leqslant 2 \int_0^1 x^n\,dx = \frac{2}{n+1}.$$

Поэтому из (1) в пределе при $n \to \infty$ получаем

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^k \varphi(x,p)\, dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+p} + \frac{1}{k+1-p} \right) =$$
$$= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k-p} - \frac{1}{k+p} \right).$$

В главе 14 (см. пример 4 из п. 2.4) было доказано, что

$$\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2p}{k^2 - p^2} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \forall p \in (0; 1).$$

Следовательно,

$$\mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \forall p \in (0; 1).$$

Эта формула называется *формулой дополнения для бета-функции*. Из нее следует *формула дополнения для гамма-функции*:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \quad \forall \alpha \in (0; 1).$$

§ 4. Интеграл Фурье и преобразования Фурье

4.1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируема на любом конечном интервале. Для ее сужения на любой интервал вида $(-l; l)$ можно написать ряд Фурье по соответствующей тригонометрической системе:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k \sin k\frac{\pi}{l}x, \tag{1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\,dx.$$

Следуя в основном схеме рассуждений Ж. Фурье, посмотрим, не вдаваясь в строгие обоснования, во что перейдет ряд (1) при $l \to +\infty$.

Естественно считать, что $a_0 \to 0$ при $l \to +\infty$. Это заведомо верно, если, например, функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.

Сумму по косинусам преобразуем следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos y_k t\,dt\right)\cos y_k x\cdot\Delta y_k, \tag{2}$$

где $y_k = k\dfrac{\pi}{l}$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \dfrac{\pi}{l}$. Можно заметить, что если ввести функцию

$$a(y) = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos yt\,dt, \tag{3}$$

то сумма (2) напоминает интегральную сумму интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} a(y)\cos yx\,dy, \tag{4}$$

и поэтому можно считать, что сумма (2) при $l \to +\infty$ переходит в интеграл (4).

Аналогично показывается, что сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\dfrac{\pi}{l}x$ при $l \to +\infty$ переходит в интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} b(y)\sin yx\,dy$, где

$$b(y) = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin yt\,dt. \tag{5}$$

Таким образом, тригонометрический ряд (1) при $l \to +\infty$ переходит в интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} (a(y)\cos yx + b(y)\sin yx)\,dy, \tag{6}$$

где $a(y)$ и $b(y)$ вычисляются по формулам (3) и (5).

Чтобы показать зависимость функций (3) и (5) от функции f вместо $a(y)$ и $b(y)$ будем писать $a(f;y)$ и $b(f;y)$ или $a(f)$ и $b(f)$.

Легко усмотреть аналогию между коэффициентами Фурье периодической функции по тригонометрической системе и функциями $a(f)$ и $b(f)$. Аналогом ряда Фурье здесь будет интеграл (6), который называется *интегралом Фурье.*

Заметим, что не для всякой функции f, которая абсолютно интегрируема на любом конечном интервале, пределы (3) и (5) существуют. Если же функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то эти пределы заведомо существуют и

$$a(f;y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{7}$$

$$b(f;y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{8}$$

Теорема. *Если функция f определена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то функции $a(f)$ и $b(f)$ определены и ограничены на $\mathbb{R}$, причем*

$$\|a(f;y)\|_C \leqslant \frac{1}{\pi}\|f\|_{L_1}, \quad \|b(f;y)\|_C \leqslant \frac{1}{\pi}\|f\|_{L_1}. \tag{9}$$

Кроме того, они непрерывны на $\mathbb{R}$ и

$$\lim_{y\to\pm\infty} a(f;y) = \lim_{y\to\pm\infty} b(f;y) = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Из неравенств

$$|f(t)\cos yt| \leqslant |f(t)|, \quad |f(t)\sin yt| \leqslant |f(t)|$$

и абсолютной интегрируемости функции f на $\mathbb{R}$ следует, что интегралы (7) и (8) сходятся равномерно на $\mathbb{R}$ относительно y, и поэтому функции $a(f)$ и $b(f)$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

Неравенства (9) очевидны, а соотношения (10) следуют из теоремы Римана об осцилляции. Теорема доказана.

Определение 1. Определенная на $\mathbb{R}$ функция называется *локально интегрируемой*, если она абсолютно интегрируема на любом конечном интервале.

Определение 2. Для любой локально интегрируемой функции $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, предел

$$\lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx$$

называют *интегралом от* $-\infty$ *до* $+\infty$ *в смысле главного значения* (или *в смысле Коши*) и обозначают

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Согласно этому определению, формулы (3) и (5) принимают вид

$$a(y) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos yt\,dt, \tag{11}$$

$$b(y) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin yt\,dt. \tag{12}$$

В дальнейшем буквы v.p. перед интегралом мы будем иногда не писать. Обычно такое сокращение не приводит к недоразумениям.

Пример. Найдем $a(y)$ и $b(y)$ для функции

$$f(x) = \frac{\sin \delta x}{x}, \quad \delta > 0.$$

Так как функция f четная, то $b(y) \equiv 0$. А по формуле (11) находим:

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \delta x}{x} \cos yx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\delta + y)x}{x}\,dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\delta - y)x}{x}\,dx.$$

Используя значение интеграла Дирихле, отсюда получаем

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\delta + y) + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\delta - y)\right).$$

Следовательно, $a(y) = 1$, если $|y| < \delta$, и $a(y) = 0$, если $|y| > \delta$. Кроме того, $a(\delta) = a(-\delta) = \frac{1}{2}$.

Рассматриваемая функция, после доопределения $f(0) = \delta$, непрерывна на $\mathbb{R}$, но не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$. У нее $a(y)$ является разрывной функцией. Это не противоречит доказанной теореме, так как функция f не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$.

4.2. Представление функций интегралом Фурье. Признаки Дини и Дирихле. Для интеграла Фурье, как и для ряда Фурье, укажем условия на функцию f, при выполнении которых ее интеграл Фурье сходится. В частности, укажем условия, когда он сходится к $f(x)$.

Будем предполагать, что функция f определена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда, как известно, функции $a(f;y)$ и $b(f;y)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, и поэтому вопрос о сходимости интеграла Фурье функции f, т.е. интеграла

$$\int_0^{+\infty} (a(f;y)\cos yx + b(f;y)\sin yx)\,dy,$$

сводится к вопросу о пределе функции

$$T_\eta(f;y) = \int_0^{\eta} (a(f;y)\cos yx + b(f;y)\sin yx)\,dy \tag{1}$$

при $\eta \to +\infty$.

Подставив в (1) выражения для $a(f;y)$ и $b(f;y)$:

$$a(f;y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt,$$

$$b(f;y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt,$$

получим:

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt.$$

Здесь внутренний интеграл сходится равномерно относительно y, поэтому можно поменять порядок интегрирования. Поменяв порядок интегрирования и проинтегрировав $\cos y(x-t)$ по y, получим:

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt$$

или, после замены $t = x+\xi$,

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin\eta\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Наконец, так как функция $\dfrac{\sin\eta\xi}{\xi}$ относительно ξ является четной, то

$$T_\eta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x+\xi)+f(x-\xi)}{\xi}\sin\eta\xi\,d\xi. \tag{2}$$

Теорема 1. *Если абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет односторонним условиям Дини, то ее интеграл Фурье в точке x_0 сходится к*

$$M_f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Доказательство. Прежде всего напомним, что выполнение односторонних условий Дини в точке x_0 означает, что функция f в точке x_0 имеет конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, и функции

$$F_\pm(\xi) = \frac{f(x_0\pm\xi)-f(x_0\pm 0)}{\xi} \tag{3}$$

абсолютно интегрируемы на некотором интервале $(0;\delta)$.

Учитывая обозначение (3) и равенство

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\eta\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{2} \quad \forall\eta>0,$$

согласно формуле (2) получаем

$$T_\eta(f;x_0) - M_f(x_0) = \frac{1}{\pi}\sum_{\pm}\int\limits_{0}^{+\infty} F_\pm(\xi)\sin\eta\xi\,d\xi.$$

Интеграл по ξ от 0 до $+\infty$ запишем в виде суммы трех интегралов:

$$\int_0^{\delta} F_{\pm}(\xi)\sin\eta\xi\,d\xi + \int_{\delta}^{+\infty}\frac{f(x_0\pm\xi)}{\xi}\sin\eta\,\xi\,d\xi - f(x_0\pm 0)\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\eta\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Здесь функции $F_{\pm}(\xi)$ абсолютно интегрируемы на интервале $(0;\delta)$, а функции $\frac{1}{\xi}f(x_0\pm\xi)$ абсолютно интегрируемы на интервале $(\delta;+\infty)$. Поэтому, согласно теореме Римана об осцилляции, первые два интеграла стремятся к нулю при $\eta\to+\infty$. Для третьего интеграла имеем:

$$\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\eta\xi}{\xi}\,d\xi = \int_{\delta\eta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt \to 0$$

при $\eta\to+\infty$. Таким образом, $\lim\limits_{\eta\to+\infty} T_{\eta}(f;x_0) = M_f(x_0)$. Теорема 1 доказана.

Эта теорема называется *признаком Дини сходимости интеграла Фурье*, а равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x_0-t)\,dt = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

— *формулой Фурье для функции f в точке x_0.*

Следствие 1. *Если функция $f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, на $\mathbb{R}$ абсолютно интегрируема и в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Дини, то*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt \quad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (4)$$

Равенство (4) называется *формулой Фурье для функции f* или *представлением функции f интегралом Фурье.*

Напомним, что если функция f в точке x_0 удовлетворяет условию Липшица (или односторонним условиям Липшица) порядка $\alpha>0$, то в этой точке она удовлетворяет и условию Дини (соответственно односторонним условиям Дини).

Следствие 2. *Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и в точке $x\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица положительного порядка, то ее интеграл Фурье в этой точке сходится к $f(x)$.*

Теорема 2. *Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дирихле, то ее интеграл Фурье в точке x_0 сходится к $M_f(x_0)$.*

Доказательство. Напомним, что выполнение условия Дирихле в точке x_0 означает, что существует $\delta>0$ такое, что на интервалах $(x_0-\delta; x_0)$ и $(x_0; x_0+\delta)$ функция f монотонна и ограничена. В частности, функция f в точке x_0 имеет конечные односторонние пределы $f(x_0\pm0)$.

Как и при доказательстве теоремы 1, получаем:

$$T_\eta(f; x_0) - M_f(x_0) = \frac{1}{\pi}\sum_{\pm}\int_0^{+\infty} F_\pm(\xi)\sin\eta\xi\,d\xi.$$

Интеграл по ξ от 0 до $+\infty$ представим в виде суммы двух интегралов: интеграла от 0 до $h < \delta$ и интеграла от h до $+\infty$.

По второй теореме о среднем для любого $h \in (0; \delta)$ существует $\theta \in [0; h]$ такое, что

$$\int_0^h F_\pm(\xi)\sin\eta\xi\,d\xi = (f(x_0 \pm h) - f(x_0 \pm 0))\int_\theta^h \frac{\sin\eta\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Отсюда и из сходимости интеграла Дирихле следует, что существует постоянная C такая, что

$$\left|\int_0^h F_\pm(\xi)\sin\eta\xi\,d\xi\right| \leqslant C\,|f(x_0 \pm h) - f(x_0 \pm 0)|$$

для любого $h \in (0; \delta)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует h_ε такое, что

$$\left|\int_0^{h_\varepsilon} F_\pm \sin\eta\xi\,d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Как и в теореме 1, доказывается, что интеграл от h_ε до $+\infty$ стремится к нулю при $\eta \to +\infty$, и поэтому существует η_ε такое, что для любого $\eta > \eta_\varepsilon$

$$\left|\int_{h_\varepsilon}^{+\infty} F_\pm(\xi)\sin\eta\xi\,d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теорема 2 доказана.

Эту теорему будем называть *признаком Дирихле сходимости интеграла Фурье.*

4.3. Комплексная форма интеграла Фурье. Для локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f введем функцию

$$c(f; y) = \frac{1}{2\pi} \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt, \tag{1}$$

являющуюся аналогом коэффициентов Фурье в комплексной форме для периодических функций, и через эту функцию выразим интеграл Фурье функции f.

Очевидно,

$$c(f; y) = \frac{1}{2}(a(f; y) - ib(f; y)),$$

где $a(f; y)$ и $b(f; y)$ — функции, определенные в п. 4.1. Тогда для любого $\eta > 0$ имеем

$$\int_{-\eta}^{\eta} c(f; y)\, e^{iyx}\, dy = \frac{1}{2} \int_{-\eta}^{\eta} (a(f; y) - ib(f; y))(\cos yx + i \sin yx)\, dy.$$

А так как функция $a(f; y)$ четная, а функция $b(f; y)$ — нечетная, то

$$\int_{-\eta}^{\eta} c(f; y)\, e^{iyx}\, dy = \int_{0}^{\eta} (a(f; y) \cos yx + b(f; y) \sin yx)\, dy.$$

Отсюда в пределе при $\eta \to +\infty$ получаем, что интеграл Фурье функции f равен интегралу

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} c(f; y)\, e^{iyx}\, dy. \tag{2}$$

Интеграл (2), где функция $c(f; y)$ определена по формуле (1), называется *интегралом Фурье в комплексной форме.*

Теорема. *Если абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f в любой точке $x \in \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Дини или условию Дирихле, то для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt \right) e^{iyx}\, dy, \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iyt}\, dt \right) e^{-iyx}\, dy, \tag{4}$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Интеграл (3) равен интегралу (2), т.е. интегралу Фурье функции f, а он, как следует из предыдущего пункта, в любой точке $x \in \mathbb{R}$ равен $f(x)$. Формула (3) доказана. Для доказательства формулы (4) заметим, что интеграл (4) равен пределу при $\eta \to +\infty$ интеграла

$$\int_{-\eta}^{\eta} \overline{c}(f;y)\, e^{-iyx}\, dy = \int_{-\eta}^{\eta} c(f;y)\, e^{iyx}\, dy,$$

где $\overline{c}(f;y)$ обозначает функцию, комплексно сопряженную к функции $c(f;y)$. Теорема доказана.

Интегралы в формулах (3) и (4) называются *повторными интегралами Фурье функции* f. В таком виде они впервые были получены О. Коши.

Следствие. *Пусть функция f на $\mathbb{R}$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Тогда, если функция f четная, то*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t)\, \cos yt\, dt \right) \cos xy\, dy,$$

а если нечетная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t)\, \sin yt\, dt \right) \sin xy\, dy$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

4.4. Преобразования Фурье и формулы обращения. Пусть абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f в любой точке $x \in \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Дини или условию Дирихле. Тогда, как показано в предыдущем пункте,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} c(f;y)\, e^{iyx}\, dy, \tag{1}$$

где

$$c(f;y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dx. \tag{2}$$

Здесь функция f принимает действительные значения, а функция $c(f;y)$ принимает, вообще говоря, комплексные значения. Кроме того, в равенстве (1) нет множителя перед интегралом, а в равенстве (2) перед интегралом стоит множитель $\dfrac{1}{2\pi}$. Обычно используют более симметричные формулы.

Определение 1. Для любой локально интегрируемой комплекснозначной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, функция

$$\hat{f}(\xi) = \text{v.p.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \tag{3}$$

называется *преобразованием* (или *образом*) *Фурье функции* f, а функция

$$\tilde{f}(\xi) = \text{v.p.}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\xi x}\, dx \tag{4}$$

называется *обратным преобразованием* (или *прообразом*) *Фурье функции* f.

Если функция f абсолютно интегрируема, то, как доказано в п. 4.1, функции $\hat{f}$ и $\tilde{f}$ непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$, причем

$$\|\hat{f}\|_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1}, \quad \|\tilde{f}\|_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L_1}.$$

Кроме того,

$$\lim_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \to \infty} \tilde{f}(\xi) = 0.$$

Определение 2. Оператор $F : f \to \hat{f}$ называется *оператором* (или *преобразованием*) *Фурье*, а оператор $F^{-1} : f \to \tilde{f}$ — *обратным преобразованием Фурье*.

Теорема 1. *Если функция f имеет преобразование Фурье, то для любого $a \in \mathbb{R}$ и любого $\alpha > 0$ функции $f(\alpha x)$ и $f(x + a)$ тоже имеют преобразования Фурье, причем*

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \quad F^{-1}[f(\alpha x)] = \frac{1}{\alpha} \tilde{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right),$$

$$F[f(x + a)] = e^{ia\xi} \hat{f}(\xi), \quad F^{-1}[f(x + a)] = e^{-ia\xi} \tilde{f}(\xi).$$

Доказательство. По определению,

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \to +\infty} \int\limits_{-l}^{l} f(\alpha x)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

Если $\alpha > 0$, то после замены $y = \alpha x$ получаем:

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \to +\infty} \int\limits_{-\alpha l}^{\alpha l} f(y)\, e^{-i\frac{y}{\alpha}\xi} \frac{1}{\alpha}\, dy = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right).$$

Аналогично, делая замену $x + a = y$, получаем:

$$F[(f(x+a))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l\to+\infty} \int\limits_{-l}^{l} f(x+a)\, e^{-ix\xi}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l\to+\infty} \int\limits_{-l+a}^{l+a} f(y)\, e^{-i(y-a)\xi}\, dy = e^{ia\xi} \hat{f}(\xi).$$

Формулы для обратного преобразования Фурье доказываются точно так же.

Теорема 2. *Если функция f абсолютно интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$ и в любой точке $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дини или условию Дирихле, то*

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f. \tag{5}$$

Легко видеть, что это утверждение является простой переформулировкой теоремы о повторных интегралах Фурье, доказанной в предыдущем пункте.

Формулы (5) называются *формулами обращения*. Они показывают, что операторы F и F^{-1} являются взаимно обратными.

Из последнего утверждения предыдущего пункта следует, что для четных и нечетных функций справедливы более простые формулы обращения. А так как такие функции достаточно задавать лишь для $x > 0$ (точкой $x = 0$ можно пренебречь), то все определения и утверждения будем давать для функций, определенных и локально интегрируемых на интервале $(0; +\infty)$.

Определение 3. Для любой функции f, определенной и локально интегрируемой на интервале $(0; +\infty)$, интеграл

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \cos yx\, dx \tag{6}$$

называется *косинус-преобразованием Фурье*, а интеграл

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \sin yx\, dx \tag{7}$$

— *синус-преобразованием Фурье функции f*.

Операторы, которые функции f ставят в соответствие функции (6) и (7), будем обозначать F_c и F_s соответственно.

Очевидно, что если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, четная, то

$$F[f] = F_c[f] = F^{-1}[f],$$

а если функция f нечетная, то

$$F[f] = -iF_s[f] = -F^{-1}[f].$$

Следствие. *Если функция* $f(x)$, $x \in (0; +\infty)$, *абсолютно интегрируема и непрерывна на интервале* $(0; +\infty)$ *и в любой его точке удовлетворяет условию Дини или условию Дирихле, то*

$$F_c[F_c[f]] = f = F_s[F_s[f]].$$

Пример 1. Найдем преобразования Фурье функции $f(x)$, которая равна 1 на отрезке $[-\delta; \delta]$ и нулю все этого отрезка.

Так как эта функция четная, то

$$F[f] = F^{-1}[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\delta} \cos yx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin \delta y}{y}.$$

Пример 2. Найдем косинус-преобразование и синус-преобразование функции $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

По формулам (6) и (7) находим:

$$F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos yx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{1}{1 + y^2},$$

$$F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin yx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{y}{1 + y^2}.$$

Пример 3. Найдем преобразования Фурье функции

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Так как эта функция четная, то

$$F[f] = F^{-1}[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos yx \, dx.$$

Этот интеграл, зависящий от параметра y, можно дифференцировать по этому параметру под знаком интеграла. Поэтому если его обозначим $g(y)$, то

$$g'(y) = -\int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin yx\, dx.$$

Отсюда после интегрирования по частям получаем дифференциальное уравнение

$$g'(y) = -yg(y).$$

Оно имеет общее решение $g(y) = Ce^{-\frac{1}{2}y^2}$ с произвольной постоянной C. Ее находим из условия $g(0) = \sqrt{\pi/2}$.

Таким образом,

$$\hat{f}(y) = \tilde{f}(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$F\left[e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}\right] = F^{-1}\left[e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}\right] = \frac{1}{\alpha}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2}$$

для любого $\alpha > 0$.

4.5. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. Функцию f, определенную на $\mathbb{R}$, будем называть *кусочно непрерывной*, если она кусочно непрерывна на любом конечном интервале. Если же она на любом конечном интервале кусочно дифференцируема, то будем говорить, что она *кусочно дифференцируема на* $\mathbb{R}$. Аналогично определяются и *кусочно непрерывно дифференцируемые на* $\mathbb{R}$ функции.

Заметим, что если функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема, то она является обобщенной первообразной для производной f'.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Тогда, если $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.*

Действительно, из равенства

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(x)\, dt, \quad c \in \mathbb{R},$$

и сходимости интеграла от $f'(x)$ на $\mathbb{R}$ следует, что пределы у $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ существуют, а из сходимости интеграла от $f(x)$ на $\mathbb{R}$ следует, что эти пределы равны нулю.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Тогда, если $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то*

$$F[f'] = i\xi \hat{f}(\xi), \quad F^{-1}[f'] = -i\xi \tilde{f}(\xi).$$

Доказательство. По формуле интегрирования по частям получаем

$$F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\xi x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\xi)\, e^{-i\xi x}\, dx.$$

В силу леммы, внеинтегральные члены равны нулю, поэтому

$$F[f'] = i\xi \hat{f}(\xi).$$

Аналогично доказывается и вторая формула.

Следствие 1. *Если $f, f', \ldots, f^{(n)}$ непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то*

$$F[f^{(k)}] = (i\xi)^k F[f],$$
$$F^{-1}[f^{(k)}] = (-i\xi)^k F^{-1}[f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

В частности,

$$\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right), \quad \tilde{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$$

при $\xi \to \pm\infty$.

Теорема 2. *Если функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то $\hat{f}(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и*

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi} = -iF[xf(x)], \quad \frac{d\tilde{f}}{d\xi} = iF^{-1}[xf(x)].$$

Доказательство. По признаку Вейерштрасса, интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \quad \text{и} \quad -i \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$$

сходятся равномерно по ξ на $\mathbb{R}$, поэтому они непрерывны и производная по ξ от первого из них равна второму. Следовательно,

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi} = -iF[xf(x)].$$

Аналогично доказывается и вторая формула.

Следствие 2. *Если функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^n f^{(n)}(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то $\hat{f}(\xi)$ и $\widetilde{f}(\xi)$ n раз непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и*

$$\frac{d^k\hat{f}}{d\xi^k} = (-i)^k F[x^k f(x)], \quad \frac{d^k\widetilde{f}}{d\xi^k} = i^k F^{-1}[x^k f(x)], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

4.6. Пространство S. Через S обозначим множество всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций, каждая из которых удовлетворяет условию: как она сама, так и ее производные любого порядка стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$ быстрее любой степени $1/x$. Таким образом, функция f, определенная на $\mathbb{R}$, принадлежит множеству S тогда и только тогда, когда она на $\mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема и, кроме того, для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ и любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется условие:

$$f^{(k)}(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Если $f \in S$, то $\hat{f} \in S$ и $\widetilde{f} \in S$.*

Доказательство. Из условия (1) при $k = 0$ и $n = l + 2$ следует, что

$$x^l f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty,$$

и поэтому $x^l f(x) \in L_1$ для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда, согласно следствию 2 из предыдущего пункта, функции $\hat{f}$ и $\widetilde{f}$ имеют непрерывные производные любого порядка.

Чтобы доказать, что $\hat{f}$ и $\widetilde{f}$ удовлетворяют условию (1), рассмотрим функцию $\varphi_k(x) = x^k f(x)$. Очевидно, она бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяет условию

$$\varphi_k^{(n)}(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty,$$

и поэтому $\varphi_k^{(n)}(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда

$$F[\varphi_k^{(n)}] = (i\xi)^n F[\varphi_k] = (i\xi)^n F[x^k f(x)].$$

А так как

$$\frac{d^k\hat{f}}{d\xi^k} = (-i)^k F[x^k f(x)],$$

то
$$\xi^n \frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k} = (-i)^{n+k} F[\varphi_k^{(n)}],$$
и, следовательно,
$$\xi^n \frac{d^k \hat{f}}{d\xi^k} \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \pm\infty.$$

Аналогично доказывается, что и $\widetilde{f}$ удовлетворяет условию (1). Теорема 1 доказана.

Легко видеть, что множество S с естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число является линейным пространством, а преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье являются линейными операторами, определенными на S. Из теоремы 1 следует, что они действуют из S в S. В следующей теореме утверждается, что они отображают S на S.

Теорема 2. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают взаимно однозначно пространство S на себя.*

Доказательство. В теореме 1 доказано, что если $f \in S$, то
$$\hat{f} = F[f] \in S \quad \text{и} \quad \widetilde{f} = F^{-1}[f] \in S.$$
Из формулы обращения следует, что если $f \in S$, то
$$F[\widetilde{f}] = f \quad \text{и} \quad F^{-1}[\hat{f}] = f.$$
Таким образом, $F[S] = S$ и $F^{-1}[S] = S$.

Из формулы обращения получаем: если $\hat{f}_1 = F[f_1]$, $\hat{f}_2 = F[f_2]$ и $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$, то $f_1 = F^{-1}[\hat{f}_1] = F^{-1}[\hat{f}_2] = f_2$, что и доказывает взаимную однозначность отображения F. Аналогично доказывается взаимная однозначность и обратного преобразования Фурье. Теорема 2 доказана.

§ 5. Свертка функций

5.1. Математическая модель работы линейного прибора. Каждый реальный прибор или процесс с математической точки зрения можно интерпретировать как некий оператор A, который преобразует входной сигнал в сигнал на выходе. Обычно эти сигналы являются функциями времени, и во многих задачах оператор A можно считать линейным, действующим из одного линейного пространства функций в другое. Кроме того, можно предполагать, что свойства прибора не меняются с течением времени. Из этого

предположения, в частности, следует, что реакции прибора на сигналы, которые отличаются только сдвигом по времени, тоже отличаются только тем же сдвигом по времени, т.е. если $Af = F$ и $g(t) = f(t - t_0)$, то $Ag = F(t - t_0)$. Оператор A, обладающий этим свойством, называют *инвариантным относительно сдвигов.*

Оказывается, что для полной характеристики аппарата, которому соответствует инвариантный относительно сдвигов линейный оператор A, достаточно знать отклик $E(t)$ этого аппарата на так называемое *единичное импульсное воздействие* (*единичный импульс*) в момент времени $t = 0$.

Единичный импульс в момент времени $t = 0$ можно понимать как предел функций

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \dfrac{1}{h}, & \text{если } 0 \leqslant t < h, \\ 0, & \text{если } t \geqslant h, \end{cases} \tag{1}$$

при $h \to 0$. График функции $\delta_h(t)$ имеет вид ступеньки ширины h и высоты $1/h$. При любом $h > 0$ площадь этой «ступеньки» равна 1.

Вместо функции (1) можно рассматривать любую функцию, которая равна нулю вне отрезка $[0; h]$, $h > 0$, и интеграл от которой по $\mathbb{R}$ равен 1. Любую такую функцию называют *единичным импульсом длительности* h. Тогда единичный импульс в момент времени $t = 0$ можно интерпретировать как предел единичных импульсов длительности h при $h \to 0$. Естественно считать, что отклик $E(t)$ аппарата A на этот предельный импульс равен пределу откликов $E_h(t)$ аппарата A на единичные импульсы $\delta_h(t)$ при $h \to 0$.

Заметим, что единичный импульс в момент времени t=0 не может быть обычной числовой функцией, так как она должна удовлетворять несовместимым условиям: должна быть равной нулю вне любой окрестности точки $t = 0$, и в то же время интеграл от нее по $\mathbb{R}$ должен равняться 1.

Единичный импульс в момент времени $t = 0$ является простейшим, но важным примером так называемых *обобщенных функций.* Он обозначается $\delta(t)$ и называется *δ-функцией Дирака.*

Понятие единичного импульса широко используется в разных разделах физики и ее приложениях. Отклик $E(t)$ прибора A на единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ в оптике называют *аппаратной функцией*, а в электротехнике — *импульсной переходной функцией* прибора A.

Покажем, как с помощью функции $E(t)$ можно выразить отклик прибора A на произвольный входной сигнал $f(t)$.

Пусть входной сигнал задается финитной функцией $f(t)$, носитель которой лежит на отрезке $[a;b]$. Отрезок $[a;b]$ точками

$$\tau_j = a + j\cdot\frac{b-a}{n}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

разобьем на n промежутков длины $h = \frac{1}{n}(b-a)$ и вместо функции f рассмотрим ступенчатую функцию $f_h(t)$, которая на каждом промежутке $[\tau_j; \tau_{j+1})$ постоянна и равна $f(\tau_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Легко видеть, что

$$f_h(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\tau_j)\delta_h(t-\tau_j)h,$$

где $\delta_h(t)$ — функция, заданная равенствами (1).

Через $E_h(t)$, как и выше, обозначим отклик прибора A на входной сигнал $\delta_h(t)$ и будем предполагать, что оператор A является линейным и обладает свойством инвариантности относительно сдвигов. Тогда

$$Af_h = \sum_{j=0}^{n-1} f(\tau_j)E_h(t-\tau_j)h.$$

Отсюда в пределе при $h \to 0$, предполагая, что все предельные переходы законны, получаем равенство

$$Af = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)E(t-\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

Интеграл (2), зависящий от параметра t, называется *сверткой функций $f(t)$ и $E(t)$* и обозначается $f * E$.

Таким образом, отклик на входное воздействие f линейного прибора A, сохраняющего сдвиги, равен свертке функции f и аппаратной функции E прибора A.

5.2. Определение и основные свойства свертки. В предыдущем пункте понятие свертки двух функций естественным образом возникло при рассмотрении линейных операторов, инвариантных относительно сдвигов. В этом пункте дадим общее определение свертки и сформулируем ее основные свойства.

Определение 1. Для любых двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенных на $\mathbb{R}$, несобственный интеграл

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(y-x)\,dx, \qquad (1)$$

зависящий от параметра $y \in \mathbb{R}$, называется *сверткой функций φ и ψ* и обозначается $\varphi * \psi$.

Говорят, что свертка $\varphi * \psi$ существует, если интеграл (1) сходится при любом $y \in \mathbb{R}$.

Таким образом, свертка функций φ и ψ — это новая функция, заданная формулой

$$(\varphi * \psi)(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(y-x)\,dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, если свертка $\varphi * \psi$ существует, то свертка $\psi * \varphi$ тоже существует и

$$(\varphi * \psi)(y) = (\psi * \varphi)(y) \quad \forall\, y \in \mathbb{R},$$

т. е. *операция свертки двух функций обладает свойством коммутативности*:

$$\varphi * \psi = \psi * \varphi.$$

Действительно, сделав в интеграле (1) замену $y - x = t$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(y-x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\varphi(y-t)\,dt. \qquad (2)$$

Свертка (2) заведомо существует, если одна из функций абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, а другая функция на $\mathbb{R}$ ограничена и *локально интегрируема*, т.е. интегрируема на любом конечном отрезке. Более того, эта свертка будет ограниченной функцией. Действительно, если $|\psi(x)| \leqslant M \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, то

$$|(\varphi * \psi)(y)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)\psi(y-x)|\,dx \leqslant M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx.$$

Если, кроме того, одна из функций непрерывна на $\mathbb{R}$, то свертка (2) непрерывна на $\mathbb{R}$.

Из теоремы о перестановке двух несобственных интегралов можно получить условия, при которых свертка $(\varphi * \psi)(y)$ является абсолютно интегрируемой функцией. Заведомо, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ограничены, абсолютно интегрируемы и непрерывны на $\mathbb{R}$, то их свертка тоже непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(y)|\,dy \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \cdot |\psi(y-x)|\,dx.$$

В последнем интеграле можно поменять порядок интегрирования (см. теорему из п. 2.5), поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(y)|\,dy \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|\,dx.$$

Если, кроме того, функция $\chi(x)$ тоже ограничена, абсолютно интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$, то свертка $(\varphi * \psi) * \chi$ существует и

$$(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi),$$

т.е. *операция свертки обладает свойством ассоциативности.* (Доказать это утверждение в качестве упражнения.)

Определение 2. Оператор, который каждой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ставит в соответствие функцию $g(x) = f(x-h)$, где h — некоторое число, называется *оператором сдвига* или *h-сдвигом* и обозначается T_h.

Таким образом, по определению T_h,

$$\mathrm{T}_h f = f(x-h).$$

Очевидно, *операция свертки коммутирует с операцией сдвига*, т.е.

$$\mathrm{T}_h(\varphi * \psi) = (\mathrm{T}_h \varphi) * \psi = \varphi * (\mathrm{T}_h \psi).$$

Действительно,

$$\mathrm{T}_h(\varphi * \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(y-h-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-h)\psi(y-x)\,dx = (\mathrm{T}_h \varphi) * \psi.$$

Из теоремы о дифференцировании интегралов, зависящих от параметра (см. п. 1.3), следует, что если функция φ локально интегрируема, а функция ψ финитна и k раз непрерывно дифференцируема, то свертка $\varphi * \psi$ тоже k раз непрерывно дифференцируема, причем если через D обозначить оператор дифференцирования, то

$$\mathrm{D}^k(\varphi * \psi) = \varphi * (\mathrm{D}^k \psi).$$

Замечание. Из рассмотренных свойств операции свертки видно, что она обладает основными свойствами операции умножения. Действительно,

$$\varphi * \psi = \psi * \varphi,$$

$$(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi),$$

$$(\alpha\varphi + \beta\psi) * \chi = \alpha(\varphi * \chi) + \beta(\psi * \chi),$$

где α и β — числа.

Покажем, что δ-функцию Дирака можно трактовать как «единицу» относительно этого «умножения». Для этого рассмотрим свертку непрерывной функции $f(t)$ с функцией $\delta_h(t)$, $h > 0$, определенной в п. 4.1. Очевидно,

$$f * \delta_h = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_h(x-t)\,dt = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)\,dt,$$

и поэтому

$$\lim_{h\to+0}(f*\delta_h)(x) = f(x).$$

Используя понятие δ-функции, это соотношение можно записать в виде равенства

$$f * \delta = f.$$

5.3. Дельта-образные семейства функций и аппроксимационные теоремы. Семейство неотрицательных функций $\psi_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$, зависящих от параметра $\alpha \in A$, называется *δ-образным при $\alpha \to \bar{\alpha}$*, где $\bar{\alpha}$ — конечная или бесконечная предельная точка множества $A \subset \mathbb{R}$, если выполнены следующие два условия:

$$1)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha(x)\,dx = 1 \quad \forall\alpha \in A;$$

$$2)\quad \lim_{\alpha\to\bar{\alpha}} \int_{-h}^{h} \psi_\alpha(x)\,dx = 1 \quad \forall h > 0.$$

Очевидно, для любой неотрицательной функции $\psi(x)$, которая интегрируема на $\mathbb{R}$ и такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 1,$$

семейство функций $\psi_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha}\psi\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, $\alpha > 0$, является δ-образным при $\alpha \to +0$.

Теорема 1. *Пусть $\psi_\alpha(x)$, $\alpha \in A$, — δ-образное семейство функций при $\alpha \to \bar{\alpha}$, а функция $f(x)$ ограничена и локально интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда, если функция f непрерывна на интервале Δ, то для любого отрезка $[a;b] \subset \Delta$ справедливо равенство*

$$\lim_{\alpha\to\bar{\alpha}} \|f*\psi_\alpha - f\|_{C([a;b])} = 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Очевидно,

$$(f * \psi_\alpha)(x) - f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\psi_\alpha(t)\,dt.$$

Выберем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда из непрерывности функции f на интервале Δ следует, что

$$\exists\,\delta > 0: \quad \forall\, x \in [a;b],\ \forall\, t \in [-\delta;\delta] \quad |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому, если $|f(x)| \leqslant M$, то

$$|(f * \psi_\alpha)(x) - f(x)| \leqslant 2M \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \psi_\alpha(t)\,dt + \\ + \varepsilon \int\limits_{-\delta}^{+\delta} \psi_\alpha(t)\,dt + 2M \int\limits_{+\delta}^{+\infty} \varphi_\alpha(t)\,dt \quad (2)$$

для любого $x \in [a;b]$.

Из свойств δ-образного семейства функций при $\alpha \to \bar{\alpha}$ следует, что

$$\exists\, O(\bar{\alpha}): \ \forall\, \alpha \in O(\bar{\alpha}) \ \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \psi_\alpha(t)\,dt < \varepsilon, \ \int\limits_{+\delta}^{+\infty} \psi_\alpha(t)\,dt < \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (2) получаем:

$$\|f * \psi_\alpha - f\|_{C[a;b]} < 4M\varepsilon + \varepsilon \quad \forall\, \alpha \in O(\bar{\alpha}),$$

что и доказывает равенство (1). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любой финитной непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$ существует последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_C = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $\psi(x) = k \exp \dfrac{1}{x^2 - 1}$, если $|x| < 1$, и $\psi(x) = 0$, если $|x| \geqslant 1$, где k подобрано так, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 1.$$

Очевидно, функция $\psi(x)$ финитна и бесконечно дифференцируема, и последовательность функций $\psi_n(x) = n\psi(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, является δ-образной при $n \to \infty$. Тогда $\varphi_n(x) = (f*\psi_n)(x)$, $n \in \mathbb{N}$, являются бесконечно дифференцируемыми финитными функциями. Из теоремы 1 следует, что эти функции удовлетворяют условию (3). Теорема 2 доказана.

Ее обычно формулируют так:

Любую финитную непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию с любой точностью можно равномерно аппроксимировать финитными бесконечно дифференцируемыми функциями.

Теорема 3. *Любую непрерывную на отрезке функцию с любой точностью можно равномерно аппроксимировать на этом отрезке алгебраическими многочленами.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < a < b < 1$. Продолжим f на $\mathbb{R}$ так, чтобы она была непрерывной на $\mathbb{R}$ и была равной нулю вне отрезка $[0;1]$.

Пусть теперь $\psi_n(x) = k_n(1-x^2)^n$, если $|x| \leqslant 1$, и $\psi_n(x) = 0$, если $|x| > 1$, причем k_n подобрано так, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\,dx = 1$. Легко проверить, что последовательность $\psi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, при $n \to \infty$ является δ-образной.

Из теоремы 1 следует, что $\varphi_n(x) = (f * \psi_n)(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на отрезке $[a;b]$ сходится к $f(x)$.

Легко доказывается, что $\varphi_n(x)$ — это многочлен степени $2n$. Действительно,

$$\varphi_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_n(x-t)\,dt = \int\limits_0^1 f(t)k_n\left(1-(x-t^2)\right)^n dt.$$

Теорема 3 доказана.

Она называется *аппроксимационной теоремой Вейерштрасса.*

5.4. Примеры применения свертки. В этом пункте рассмотрим два примера применения операции свертки.

Пример 1. Легко проверить, что семейство функций

$$\psi_y(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}, \quad y > 0$$

является δ-образной при $y \to +0$.

Для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, функция

$$u(x,y) = (f * \psi_y)(x)$$

определена для любых $x \in \mathbb{R}$ и $y > 0$. Более того, она ограничена и бесконечно дифференцируема в полуплоскости $y > 0$. Из теоремы 1 п. 5.3. следует, что $u(x,y) \to f(x)$ при $y \to +0$.

Дифференцированием под знаком интеграла легко доказывается, что интеграл

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)y}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi$$

является *гармонической функцией*, т. е. удовлетворяет *уравнению Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Пример 2. Семейство функций

$$\psi_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0,$$

является δ-образным при $t \to +0$. (Доказать это утверждение в качестве упражнения.)

Для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, функция

$$u(x,t) = (f * \psi_t)(x)$$

определена для любых $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$. Кроме того, она ограничена и бесконечно дифференцируема при $t > 0$, а из теоремы 1 п. 5.3 следует, что $u(x,t) \to f(x)$ при $t \to +0$.

Легко доказывается, что интеграл

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi$$

удовлетворяет одномерному *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

22 Зак. 193

§ 6. Многомерные преобразования Фурье

6.1. Определения и обозначения. Как и для функций одного переменного, определенная на $\mathbb{R}^n$ функция называется *локально интегрируемой на* $\mathbb{R}^n$, если она абсолютно интегрируема на любом ограниченном измеримом множестве пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Для любой локально интегрируемой функции $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, предел

$$\lim_{l\to+\infty} \int\limits_{\Delta_l} \varphi(x)\,dx,$$

где $\Delta_l = \{x : -l < x_j < l,\ j = 1,\ldots,n\}$, будем называть *интегралом по* $\mathbb{R}^n$ *в смысле главного значения* и обозначать

$$\text{v.p}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx.$$

В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены на $\mathbb{R}^n$ и, вообще говоря, принимают комплексные значения.

Определение 2. Для любой локально интегрируемой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ функция

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\text{v.p}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(\xi,x)}\,dx, \tag{1}$$

где $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $(\xi,x) = \xi_1x_1+\cdots+\xi_nx_n$, называется *преобразованием Фурье* (или *образом Фурье*) *функции* f, а функция

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\text{v.p}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(\xi,x)}\,dx \tag{2}$$

называется *обратным преобразованием Фурье* (или *прообразом Фурье*) *функции* f.

Очевидно, для любой абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^n$ функции f интегралы (1) и (2) существуют как обычные несобственные интегралы для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$. Более того, функции $\hat{f}(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ на $\mathbb{R}^n$ непрерывны и ограничены.

Как и в случае одного переменного, в общем случае оператор $F : f \to \hat{f}$ называется *оператором* (или *преобразованием*) *Фурье*, а оператор $F^{-1} : f \to \tilde{f}$ — *обратным преобразованием Фурье*.

Пример 1. Найдем преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2|x|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \alpha > 0.$$

По определению,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{l\to+\infty} \int_{-l}^{l} dx_1 \dots \int_{-l}^{l} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x,\alpha x)} e^{-i(\xi,x)}\, dx_n =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x_j)^2} e^{-i\xi_j x_j}\, dx_j = \prod_{j=1}^{n} F\left[e^{-\frac{1}{2}(\alpha x_j)^2}\right].$$

В примере 3 в п. 4.4 показано, что

$$F\left[e^{-\frac{1}{2}(\alpha x_j)^2}\right] = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_j}{\alpha}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{|\xi|}{\alpha}\right)^2}.$$

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Тогда, если f и $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, то*

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] = i\xi_j \hat{f}(\xi), \quad F^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] = -i\xi_j \tilde{f}(\xi).$$

Лемма 2. *Если функции $f(x)$ и $x_j f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, то $\hat{f}(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ на $\mathbb{R}^n$ непрерывны и имеют непрерывные производные по ξ_j, причем*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -iF[x_j f(x)], \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_j} = iF^{-1}[x_j f(x)].$$

Эти утверждения доказываются так же, как и в случае $n = 1$. Чтобы их обобщить, введем некоторые новые обозначения.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа. Тогда для любого $x = (x_1, \dots, x_n)$ по определению положим:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Аналогично, если D_j — оператор дифференцирования по j-й переменной, то

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f$$

обозначает производную порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ от функции f. В этом случае α называется n-мерным *мультииндексом* с компонентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Теорема 1. *Если сама функция f и все ее производные до m-го порядка включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, то*

$$F[D^\alpha f] = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \quad F^{-1}[D^\alpha f] = (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \tilde{f}(\xi),$$

для любого α, у которого $|\alpha| \leqslant m$.

Теорема 2. *Если сама функция $f(x)$ и любое произведение $x^\alpha f(x)$, $|\alpha| \leqslant m$, абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, то $\hat{f}(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ на $\mathbb{R}^n$ непрерывны и имеют непрерывные производные до m-го порядка включительно, причем*

$$D^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} F[x^\alpha f(x)], \quad D^\alpha \tilde{f} = i^{|\alpha|} F^{-1}[x^\alpha f(x)]$$

для любого α, у которого $|\alpha| \leqslant m$.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка. Тогда, если она сама и все ее производные $D^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant n + 1$, абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, то $\hat{f}(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ тоже абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что

$$\left| F[D_j^{n+1} f] \right| = |\xi_j|^{n+1} |\hat{f}(\xi)|, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому

$$|F[f]| + \sum_{j=1}^{n} \left| F[D_j^{n+1} f] \right| = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{n+1} \right) |\hat{f}(\xi)|,$$

причем все слагаемые в левой части этого равенства ограничены. Следовательно, существует постоянная C такая, что

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{C}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} |\xi_j|^{n+1}}. \tag{3}$$

Аналогичное неравенство справедливо и для $\tilde{f}(\xi)$.

Следствие доказано, так как интеграл по $\mathbb{R}^n$ от функции, стоящей в правой части неравенства (3), сходится.

6.2. Формулы обращения. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, непрерывна и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}^n$, и, кроме того, ее преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$ тоже абсолютно интегрируемо на $\mathbb{R}^n$. Докажем, что при этих условиях для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}\,d\xi = (2\pi)^{n/2}f(x), \tag{1}$$

где

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(y,\xi)}dy.$$

Вместо интеграла (1) рассмотрим интеграл

$$J_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{-\frac{|\xi|^2\varepsilon^2}{2}}\cdot e^{i(x,\xi)}\,d\xi, \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Подставив в него выражение для $\hat{f}(\xi)$, замечаем, что при любом $\varepsilon > 0$ можно поменять порядок интегрирования. Поэтому

$$J_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2\varepsilon^2}{2}}e^{-i(y-x,\xi)}d\xi\right)dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\eta+x)\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2\varepsilon^2}e^{-i(\eta,\xi)}d\xi\right)d\eta.$$

Здесь под интегралом в скобках стоит преобразование Фурье функции $g(\xi) = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2\varepsilon^2}$. В предыдущем пункте показано, что

$$F[g] = \frac{1}{\varepsilon^n}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{|\eta|}{\varepsilon}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$J_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\eta+x)\frac{1}{\varepsilon^n}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{|\eta|}{\varepsilon}\right)^2}d\eta.$$

Сделав здесь замену $\eta_j = \zeta_j\varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$J_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+\varepsilon\zeta)e^{-\frac{1}{2}|\zeta|^2}d\zeta. \tag{3}$$

Интеграл (3) сходится равномерно по ε на отрезке $[0;1]$, и функция f непрерывна. Следовательно, в интеграле (3) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\varepsilon \to +0$, и поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to+0} J_\varepsilon(x) = f(x)(2\pi)^{n/2}. \tag{4}$$

С другой стороны, интеграл (2) тоже сходится равномерно по ε на отрезке $[0;1]$, так как мы предположили, что $\hat{f}(\xi)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} J_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi. \tag{5}$$

Теперь равенство (1) следует из соотношений (4) и (5).

Теорема 1. *Если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, непрерывна и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}^n$, и ее преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$ тоже абсолютно интегрируемо на $\mathbb{R}^n$, то*

$$F^{-1}[F[f]] = f. \tag{6}$$

Если же $\widetilde{f}(\xi)$ абсолютно интегрируемо на $\mathbb{R}^n$, то

$$F\left[F^{-1}[f]\right] = f. \tag{7}$$

Действительно, формула (6) следует из равенства (1), а формула (7) доказывается точно так же, как и формула (6).

Из этой теоремы и утверждения, доказанного в конце предыдущего пункта, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка. Тогда, если она сама и все ее производные до $(n+1)$-го порядка абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, то для нее справедливы формулы обращения* (6) *и* (7).

Через S обозначим множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, обладающих следующим свойством: для любых n-мерных мультииндексов α и β с неотрицательными компонентами

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < +\infty.$$

Очевидно, множество S с естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число является линейным пространством. Это пространство, введенное Л. Шварцем, будем называть *пространством быстро убывающих функций*.

Из теорем 1 и 2, доказанных в пункте 6.1, как и в случае $n = 1$, следует, что если $f \in S$, то $\hat{f} \in S$ и $\widetilde{f} \in S$, т.е. преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье пространство S отображают в пространство S, т.е.

$$F[S] \subset S, \quad F^{-1}[S] \subset S.$$

Отсюда и из формулы обращения следует, что на самом деле преобразования Фурье отображают S на S, т.е.

$$F[S] = S, \quad F^{-1}[S] = S.$$

6.3. Равенства Парсеваля. Чтобы не вдаваться в технические сложности, будем рассматривать функции из пространства S быстро убывающих функций. При этом условии докажем равенство

$$(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g), \tag{1}$$

где (f, g) — скалярное произведение в пространстве L_2, т.е.

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)\,dx.$$

Прежде всего заметим, что

$$\overline{\hat{g}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g}(x) e^{i(x,\xi)}\,dx = \widetilde{\overline{g}}(\xi).$$

Поэтому

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,\xi)}\,dx \right) \widetilde{\overline{g}}(\xi)\,d\xi.$$

Так как здесь функции f и $\widetilde{\overline{g}}$ из пространства S, то можно поменять порядок интегрирования:

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\overline{g}}(\xi) e^{-i(x,\xi)}\,d\xi \right) dx.$$

Под интегралом в скобках стоит преобразование Фурье функции $\widetilde{\overline{g}}(\xi)$, которое, согласно формуле обращения, равно $\overline{g}(x)$. Следовательно,

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)\,dx,$$

что и доказывает равенство (1).

Аналогично доказывается, что

$$(\widetilde{f},\widetilde{g}) = (f,g). \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) называются *равенствами Парсеваля*. Они показывают, что преобразование Фурье (как прямое, так и обратное) сохраняет скалярное произведение. В частности,

$$\|\hat{f}\| = \|f\| = \|\widetilde{f}\|.$$

Такие отображения называются *изометрическими* или *изометриями*.

6.4. Свертка и преобразование Фурье. Для удобства немного изменим данное выше определение свертки, добавив множитель $1/(2\pi)^{n/2}$. А именно, положим, по определению,

$$\varphi * \psi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)\,dy.$$

Докажем равенство

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]\cdot F[\psi]. \tag{1}$$

Как и в предыдущем пункте, для простоты будем предполагать, что функции φ и ψ принадлежат пространству S. Тогда

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x-y)\,dy \right) e^{-i(x,\xi)}dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)e^{-i(x,\xi)}\,dx \right) dy.$$

Легко проверяется, что для функций из пространства S перемена порядка интегрирования законна. Сделав еще замену $x-y=\eta$, получим

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)e^{-i(y,\xi)}\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\eta)e^{-i(\eta,\xi)}\,d\eta = F[\varphi]\cdot F[\psi].$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}[\varphi * \psi] = F^{-1}[\varphi]\cdot F^{-1}[\psi]. \tag{2}$$

Докажем еще равенство

$$F[\varphi\psi] = F[\varphi] * F[\psi]. \tag{3}$$

По определению,

$$F[\varphi] * F[\psi] = \hat{\varphi} * \hat{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\eta)\hat{\psi}(\xi - \eta)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\eta) \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-i(\xi-\eta,x)}\, dx \right) d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-i(\xi,x)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\eta) e^{i(\eta,x)}\, d\eta \right) dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx = F[\varphi\psi].$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}[\varphi\psi] = F^{-1}[\varphi] * F^{-1}[\psi]. \tag{4}$$

Равенства (1)–(4) иногда называют *формулами Бореля*. Их можно сформулировать следующим образом:

Преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций, а преобразование Фурье произведения двух функций равно свертке преобразований Фурье этих функций.

Глава 16

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 1. Асимптотические формулы и асимптотические ряды

1.1. Асимптотические оценки и асимптотические равенства. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на некотором числовом множестве X, и пусть ξ — конечная или бесконечная предельная точка множества X. Тогда соотношения

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to \xi,$$
$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to \xi,$$

которые были введены в § 5 главы 2, называются *асимптотическими оценками* (функции f с помощью функции g при $x \to \xi$). А соотношение $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \xi$, которое равносильно условию $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to \xi$, называется *асимптотическим равенством* функций f и g при $x \to \xi$.

Асимптотические оценки и асимптотические равенства называются *асимптотическими формулами*.

Рассмотрим несколько примеров получения асимптотических формул.

Пример 1. Получим асимптотическую формулу для приближенного вычисления $\ln n!$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_1^n \ln x\,dx = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln x\,dx \leqslant \sum_{k=2}^n \ln k \leqslant \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \ln x\,dx = \int_2^{n+1} \ln x\,dx.$$

А так как $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C$, то

$$n \ln n - n + 1 < \ln n! < (n+1)\ln(n+1) - n + 1. \qquad (1)$$

Следовательно, $\ln n! \sim n \ln n$ при $n \to \infty$ или, что то же самое,

$$\ln n! = n \ln n + o(n \ln n) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

В этом случае функция $n \ln n$, $n \in \mathbb{N}$, называется *главным членом асимптотики* функции $\ln n!$ при $n \to +\infty$. Из неравенств (1) можно получить и следующий член асимптотики для $\ln n!$ при $n \to +\infty$. Действительно, так как

$$1 < \ln n! - n \ln n + n < \ln n + (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1,$$

а $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, то

$$\ln n! = n \ln n - n + O(\ln n) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Пример 2. Найдем асимптотическую формулу для функции

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt.$$

Интегрированием по частям получаем

$$f(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n}\right) -$$

$$-e(1 + 1! + \dots + (n-1)!) + n! \int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}}\, dt.$$

Следовательно,

$$f(x) = e^x \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{x^k} + O\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{2}$$

При $x \to +\infty$ каждый член суммы (2) есть бесконечно малая функция по сравнению с предшествующим членом. При $n \to \infty$ получаем ряд

$$e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Отметим, что этот ряд расходится при любом значении $x \in \mathbb{R}$. Его частичные суммы, в отличие от классических рядов, дают относительное, а не абсолютное приближение рассматриваемой функции. Такие ряды называются *асимптотическими*. Их частичные суммы используются для описания поведения функции в пределе при стремлении x к рассматриваемой предельной точке.

1.2. Асимптотические ряды. Последовательность асимптотических формул

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \psi_0(x) + o(\psi_0(x)),\\
&f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + o(\psi_1(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \dots + \psi_n(x) + o(\psi_n(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

при $x \to \xi$, $x \in X$, где ξ — предельная точка множества X, на котором определены рассматриваемые функции, называется *асимптотическим разложением функции f по функциям $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... при $x \to \xi$.*

В этом случае пишут

$$f(x) \simeq \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_n(x) + \dots$$

или короче:

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x).$$

Обычно асимптотические разложения записывают в виде ряда

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

с некоторыми коэффициентами c_0, c_1, ..., c_n, ..., где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... — наперед заданные или специальным образом выбранные функции.

Определение 1. Пусть функции $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, определены на некотором числовом множестве X, и пусть ξ — предельная точка множества X (конечная или бесконечная). Последовательность этих функций называется *асимптотической последовательностью* при $x \to \xi$, если каждая функция $\varphi_n(x)$ в любой окрестности предельной точки ξ отлична от тождественного нуля и $\forall n \quad \varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ при $x \to \xi$.

Например, последовательность $\varphi_n(x) = (x-a)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, является асимптотической при $x \to a$, а последовательность $\varphi_n(x) = x^{-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, является асимптотической при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Определение 2. Пусть функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, определенные на множестве X, образуют асимптотическую последовательность при $x \to \xi$, где ξ — предельная точка множества X, и пусть на множестве X задана функция $f(x)$. Тогда асимптотическое разложение

$$f(x) \simeq c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

называется *асимптотическим разложением* (или *асимптотическим рядом*) *функции* f *по асимптотической последовательности* $\{\varphi_n(x)\}$ *при* $x \to \xi$, $x \in X$.

В § 2 главы 4 была доказана теорема о единственности асимптотического разложения функции по степеням $x - x_0$ при $x \to x_0$. Аналогично доказывается и общая теорема о единственности асимптотического разложения.

Теорема. *Если асимптотическое разложение данной функции по данной асимптотической последовательности существует, то оно единственно.*

(Докажите в качестве упражнения.)

Заметим, что разные функции по заданной асимптотической последовательности могут иметь одно и то же асимптотическое разложение. Например,

$$e^{-x} \simeq 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \dots + 0 \cdot x^{-n} + \dots \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

и то же разложение имеет функцию $f(x) \equiv 0$.

Заметим еще, что асимптотическое разложение заданной функции по заданной асимптотической последовательности не всегда возможно. Вообще, основной задачей при описании асимптотического поведения заданной функции f при $x \to \xi$ является задача отыскания удобной асимптотической последовательности при $x \to \xi$, по которой возможно асимптотическое разложение функции f при $x \to \xi$.

1.3. Свойства асимптотических разложений. Элементарные свойства асимптотических оценок и асимптотических равенств были рассмотрены в § 2 главы 4. Из этих свойств очевидным образом следует *свойство линейности асимптотических разложений.*

Теорема 1. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *допускают асимптотические разложения*

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad g(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi_k(x)$$

по асимптотической последовательности $\{\varphi_k(x)\}$ *при* $x \to \xi$, *то их линейная комбинация* $\alpha f + \beta g$ *тоже допускает такое разложение, причем*

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \varphi_k(x) \quad \text{при} \quad x \to \xi.$$

Докажем *теорему об интегрировании асимптотических рядов.*

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, определенные на промежутке $[a; \xi)$, непрерывны, положительны и абсолютно интегрируемы. Тогда, если функции $\varphi_k(x)$ образуют асимптотическую последовательность при $x \to \xi$, то функции*

$$\Phi_k(x) = \int\limits_x^\xi \varphi_k(t)\,dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

тоже образуют асимптотическую последовательность при $x \to \xi$.

Кроме того, если функция $f(x)$ имеет асимптотическое разложение

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad \text{при} \quad x \to \xi$$

и интеграл $F(x) = \int\limits_x^\xi f(t)\,dt$ сходится, то

$$F(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(x) \quad \text{при} \quad x \to \xi.$$

Доказательство. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\Phi_{k+1}(x)}{\Phi_k(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)} = 0 \quad \forall\, k.$$

Первое утверждение доказано.

Далее, положив

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x),$$

$$R_n(x) = \int\limits_x^\xi r_n(t)\,dt,$$

тоже по правилу Лопиталя получаем:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{R_n(x)}{\Phi_n(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = 0.$$

Теорема 2 доказана.

Аналогично, по правилу Лопиталя, доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ непрерывна и положительна на промежутке $[a;\xi)$, где $a \leqslant \xi \leqslant +\infty$, и, кроме того, интеграл от $g(x)$ по этому промежутку расходится. Тогда если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to \xi$, то*

$$\int_a^x f(t)\,dt = o\left(\int_a^x g(t)\,dt\right) \quad \text{при} \quad x \to \xi.$$

Докажите это утверждение в качестве упражнения.

Отметим, что в общем случае дифференцирование асимптотических равенств и асимптотических рядов является незаконным.

Например, функция $f(x) = e^{-x}\sin(e^x)$ такая, что

$$\forall n \quad f(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Поэтому при $x \to +\infty$ она имеет асимптотическое разложение по асимптотической последовательности $\{x^{-k}\}$, причем все коэффициенты этого разложения равны нулю. Однако функция

$$f'(x) = -e^{-x}\sin(e^x) + \cos(e^x)$$

не имеет асимптотического разложения по последовательности $\{x^{-k}\}$ при $k \to +\infty$.

Замечание. Асимптотические разложения по степенным асимптотическим последовательностям называются *степенными асимптотическими рядами.* С этими рядами можно обращаться точно так же, как и со сходящимися степенными рядами. Читатель без особого труда может сформулировать и доказать соответствующие утверждения.

§ 2. Асимптотика интегралов Лапласа

2.1. Идея метода Лапласа. В этом параграфе рассмотрим метод построения асимптотики интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_\Delta f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где Δ — конечный или бесконечный промежуток, а функции $f(x)$ и $S(x)$ определены на Δ и принимают действительные значения. Такие интегралы будем называть *интегралами Лапласа.* Нас будет интересовать асимптотика интегралов вида (1) при $\lambda \to +\infty$.

Чтобы не отвлекаться на второстепенные детали, будем предполагать, что в интеграле (1) промежуток Δ конечный, $\Delta = [a;b]$,

функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, а функция $S(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a;b]$. Кроме того, будем считать, что функция S имеет на Δ минимум только в точке $x_0 \in \Delta$, причем этот минимум строгий.

Метод Лапласа получения асимптотики интегралов вида (1) состоит в последовательном выполнении следующих этапов:

1. Если $f(x_0) \neq 0$, то интеграл (1) заменяется интегралом по сколь угодно малой окрестности точки x_0. При такой замене допускается относительная погрешность, которая стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$. Это утверждение называется *принципом локализации.*
2. В малой окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и $S(x)$ заменяются главными членами их тейлоровских разложений при $x \to x_0$, и задача получения асимптотики интеграла (1) при $\lambda \to +\infty$ сводится к асимптотике достаточно простых интегралов.

Пример 1. Пусть $x_0 = a$, $S'(a) > 0$, $f(a) \neq 0$, и поэтому

$$f(x) = f(a) + o(1), \quad S(x) = S(a) + (x-a)S'(a) + o(x-a)$$

при $x \to a$. Тогда по методу Лапласа для любого малого $\varepsilon > 0$ при $\lambda \to +\infty$ получаем следующую цепочку асимптотических равенств

$$F(\lambda) \sim \int\limits_a^{a+\varepsilon} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx \sim f(a)e^{-\lambda S(a)} \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-\lambda t S'(a)}\,dt.$$

А так как

$$\int\limits_0^{\varepsilon} e^{-\lambda t S'(a)}\,dt = \frac{1}{\lambda S'(a)}\left(1 - e^{-\lambda S(a)\varepsilon}\right),$$

то

$$F(\lambda) \sim \frac{f(a)e^{-\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Пример 2. Пусть $x_0 \in (a;b)$, $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) > 0$, и поэтому

$$f(x) = f(x_0) + o(1),$$
$$S(x) = S(x_0) + \frac{1}{2}S''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$

при $x \to x_0$. Тогда по методу Лапласа для любого малого $\varepsilon > 0$ при $\lambda \to +\infty$ имеем:

$$F(\lambda) \sim \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx \sim f(x_0)e^{-\lambda S(x_0)} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2}\,dt.$$

Сделав в последнем интеграле замену $u = At$, где $A = \sqrt{0,5\,\lambda S''(x_0)}$, получим

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-A^2t^2}\,dt = \frac{1}{A}\int_{-\varepsilon A}^{\varepsilon A} e^{-u^2}\,du.$$

А так как

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\varepsilon A}^{\varepsilon A} e^{u^2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi},$$

то при $\lambda \to +\infty$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-A^2t^2}\,dt \sim \frac{\sqrt{\pi}}{A}.$$

Следовательно,

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\,f(x_0)e^{-\lambda S(x_0)} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Пример 3. Пусть $x_0 = a$, $S'(a) = 0$ и $S''(a) > 0$. Тогда, как и в примере 1, получаем

$$F(\lambda) \sim \int_{a}^{a+\varepsilon} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx \sim f(a)e^{-\lambda S(a)}\int_{0}^{\varepsilon} e^{-A^2t^2}\,dt,$$

где $A = \sqrt{0,5\,\lambda S''(a)}$. Далее,

$$\int_{0}^{\varepsilon} e^{-A^2t^2}\,dt = \frac{1}{A}\int_{0}^{\varepsilon A} e^{-u^2}\,du \sim \frac{1}{A}\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{A}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

при $\lambda \to +\infty$. Следовательно,

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}}\,f(a)e^{-\lambda S(a)} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

В конце этого параграфа все формулы, полученные в рассмотренных примерах, будут строго доказаны. Более того, будут получены более точные асимптотические равенства.

2.2. Асимптотика канонических интегралов. Начнем с рассмотрения простейшего интеграла Лапласа

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть интеграл* (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда, если функция* $f(x)$ *в точке* $x = 0$ *удовлетворяет условию Липшица порядка 1, то при* $\lambda \to +\infty$

$$F_1(\lambda) = \frac{f(0)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Напомним, что, по определению, функция $f(x)$ в точке $x = 0$ (в данном случае справа) удовлетворяет условию Липшица порядка 1, если существуют $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$|f(x) - f(0)| \leqslant Mx \quad \forall x \in [0;\delta].$$

Интеграл (1) представим в виде суммы двух интегралов

$$F_1(\lambda) = \int_0^{\delta} f(x)e^{-\lambda x}\,dx + \int_{\delta}^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx.$$

Очевидно,

$$\left|\int_0^{\delta} f(x)e^{-\lambda x}\,dx - \int_0^{\delta} f(0)e^{-\lambda x}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^{\delta} xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{M}{\lambda^2}\int_0^{\lambda\delta} te^{-t}dt,$$

и поэтому

$$\int_0^{\delta} f(x)e^{-\lambda x}\,dx = f(0)\int_0^{\delta} e^{-\lambda x}\,dx + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. А так как

$$\int_0^{\delta} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\delta},$$

то

$$\int_0^\delta f(x)e^{-\lambda x}\,dx = \frac{f(0)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Далее,

$$\left|\int_\delta^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx\right| \leqslant \int_\delta^{+\infty} |f(x)|e^{-\lambda_0 x}\,dx \cdot e^{-(\lambda-\lambda_0)\delta} \tag{3}$$

для любого $\lambda > \lambda_0$ и любого $\delta > 0$. Следовательно, этот интеграл при $\lambda \to +\infty$ экспоненциально мал по сравнению с $1/\lambda$, и поэтому его значения не влияют на асимптотику интеграла (1). Лемма 1 доказана.

Отметим, что последнее утверждение, вытекающее из неравенства (3), называют *принципом локализации* для интеграла (1).

Следствие 1. *Пусть интеграл* (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда, если функция* $f(x)$ *в точке* $x = 0$ *имеет конечную производную, то*

$$F_1(\lambda) = \frac{f(0)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \textit{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Действительно, в этом случае функция $f(x)$ в точке $x = 0$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1.

Лемма 2. *Пусть интеграл* (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда, если функция* $f(x)$ *в точке* $x = 0$ *имеет конечную производную* n*-го порядка*, $n > 1$, *то*

$$F_1(\lambda) = \frac{f(0)}{\lambda} + \frac{f'(0)}{\lambda^2} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) \tag{4}$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$$

при $x \to +0$. Поэтому существуют $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant Mx^n \quad \forall x \in [0;\delta].$$

Тогда

$$\left|\int\limits_0^\delta f(x)e^{-\lambda x}\,dx - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\int\limits_0^\delta x^k e^{-\lambda x}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^\delta x^n e^{-\lambda x}\,dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^\delta x^n e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda}x^n e^{-\lambda x}\Big|_0^\delta + \frac{n}{\lambda}\int\limits_0^\delta x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\delta^n e^{-\lambda\delta} + \frac{n}{\lambda}\int\limits_0^\delta x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx = O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. Аналогично,

$$\int\limits_0^\delta x^k e^{-\lambda x}\,dx = k!\cdot\frac{1}{\lambda^k}\int\limits_0^\delta e^{-\lambda x}\,dx + o(e^{-\lambda\delta}) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} + o(e^{-\lambda\delta})$$

при $\lambda \to +\infty$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\delta f(x)e^{-\lambda x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\lambda^{k+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. Отсюда и из принципа локализации получаем асимптотическое равенство (4). Лемма 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть интеграл* (1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда, если функция* $f(x)$ *в точке* $x = 0$ *бесконечно дифференцируема, то*

$$F_1(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{\lambda^{k+1}} \quad \textit{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Пример 1. Вычислим асимптотику интеграла вероятностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$$

при $x \to +\infty$.

Так как $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, то

$$\Phi(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}F(x), \quad F(x) = \int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Преобразуем интеграл $F(x)$ к виду (1). Для этого сделаем сначала замену $t = x\tau$:

$$F(x) = x\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2\tau^2}\,d\tau,$$

а затем замену $\tau = \sqrt{1+u}$:

$$F(x) = \frac{1}{2}xe^{-x^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2u}\cdot(1+u)^{-1/2}\,du.$$

Мы пришли к интегралу вида (1), у которого $\lambda = x^2$,

$$f(u) = (1+u)^{-1/2} \quad \text{и} \quad f^{(k)}(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k (2k-1)!!\,.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$

$$\Phi(x) \simeq 1 - \frac{1}{x\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k\cdot x^{2k}}.$$

Полученные выше асимптотические формулы для интегралов вида (1) легко переносятся на интегралы вида

$$F_1(\lambda; a) = \int\limits_a^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx. \tag{5}$$

Лемма 3. *Пусть интеграл* (5) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда, если функция* $f(x)$ *в точке* $x = a$ *имеет конечную производную* n*-го порядка, то при* $\lambda \to +\infty$

$$F_1(\lambda; a) = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}\left(f(0) + \frac{f'(0)}{\lambda} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{\lambda^{n-1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)\right). \tag{6}$$

Действительно,

$$F_1(\lambda; a) = e^{-\lambda a} \int\limits_0^{+\infty} f(x+a) e^{-\lambda x}\, dx,$$

и формула (6) получается из формулы (4).

Теперь рассмотрим интегралы Лапласа вида

$$F_2(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x^2}\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Лемма 4. *Пусть интеграл (7) сходится абсолютно при некотором $\lambda = \lambda_0$. Тогда, если функция $f(x)$ в точке $x = 0$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, то при $\lambda \to +\infty$*

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, f(0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1 интеграл от 0 до $+\infty$ разобьем на два: от 0 до $\delta > 0$ и от δ до $+\infty$. Тогда

$$\left| \int\limits_0^{\delta} f(x) e^{-\lambda x^2}\, dx - \int\limits_0^{\delta} f(0) e^{-\lambda x^2}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_0^{\delta} x e^{-\lambda x^2}\, dx = \frac{M}{-2\lambda} e^{-\lambda x^2}\Big|_0^{\delta} = \frac{M}{2\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\delta^2}\right),$$

и поэтому

$$\int\limits_0^{\delta} f(x) e^{-\lambda x^2}\, dx = f(0) \int\limits_0^{\delta} e^{-\lambda x^2}\, dx + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{9}$$

А так как

$$\int\limits_0^{\delta} e^{-\lambda x^2}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx - \int\limits_{\delta}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx,$$

где

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx < \frac{1}{\delta}\int_\delta^{+\infty} xe^{-\lambda x^2}\,dx = \frac{1}{2\delta\lambda}e^{-\lambda\delta^2},$$

то

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Отсюда и из формулы (9) получаем

$$\int_0^\delta f(x)e^{-\lambda x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}f(0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ при } \lambda \to +\infty. \qquad (10)$$

Наконец,

$$\left|\int_\delta^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x^2}\,dx\right| \leqslant \int_\delta^{+\infty} |f(x)|e^{-\lambda_0 x^2}\,dx \cdot e^{-(\lambda-\lambda_0)\delta^2}$$

для любого $\lambda > \lambda_0$ и любого $\delta > 0$, т.е. для интеграла (7) тоже имеет место принцип локализации. Отсюда и из формулы (10) получаем асимптотическое равенство (8). Лемма 4 доказана.

Следствие 3. *Пусть интеграл (7) сходится абсолютно при некотором $\lambda = \lambda_0$. Тогда, если функция $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет конечную производную, то для $F_2(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое равенство (8).*

Лемма 5. *Пусть интеграл (7) сходится абсолютно при некотором $\lambda = \lambda_0$. Тогда, если функция $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет конечную производную n-го порядка, то при $\lambda \to +\infty$*

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\lambda^{-\frac{k+1}{2}} + O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}\right). \qquad (11)$$

Доказательство. Из формулы Тейлора для функции $f(x)$ в точке $x = 0$ следует, что существуют $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant M x^n \quad \forall x \in [0; \delta].$$

Тогда

$$\left| \int_0^\delta f(x) e^{-\lambda x^2}\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_0^\delta x^k e^{-\lambda x^2}\, dx \right| \leqslant M \int_0^\delta x^n e^{-\lambda x^2}\, dx.$$

Очевидно,

$$\int_0^{+\infty} x^k e^{-\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right),$$

где $\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$ — гамма-функция Эйлера.

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_\delta^{+\infty} x^k e^{-\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{\delta^2}^{+\infty} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{-2\lambda} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-\lambda t} \Big|_{\delta^2}^{+\infty} + \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{k-1}{2} \int_{\delta^2}^{+\infty} t^{\frac{k-3}{2}} e^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= \frac{k-1}{4\lambda} \int_{\delta^2}^{+\infty} t^{\frac{k-3}{2}} e^{-\lambda t}\, dt + o\left(e^{-\lambda \delta^2}\right),$$

а поступая так и далее, видим, что

$$\int_\delta^{+\infty} x^k e^{-\lambda x^2}\, dx = o\left(e^{-\lambda\delta^2}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Таким образом, при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\delta f(x) e^{-\lambda x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \lambda^{-\frac{k+1}{2}} + O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}\right). \quad (12)$$

А так как

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x^2}\,dx\right| \leqslant \int_{\delta}^{+\infty} |f(x)|e^{-\lambda_0 x^2}\,dx \cdot e^{-(\lambda-\lambda_0)\delta^2}$$

для любого $\lambda > \lambda_0$ и любого $\delta > 0$, то отсюда и из (12) получаем асимптотическое равенство (11). Лемма 5 доказана.

Следствие 4. *Пусть интеграл* (7) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда, если функция* $f(x)$ *в точке* $x = 0$ *бесконечно дифференцируема, то при* $\lambda \to +\infty$

$$F_2(\lambda) \simeq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\lambda^{-\frac{k+1}{2}}. \tag{13}$$

Напомним, что если k нечетное, $k = 2p+1$, то

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \Gamma(p+1) = p!,$$

а если k четное, $k = 2p$, то

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = p!\sqrt{\pi}.$$

Выпишем несколько первых членов асимптотического разложения (13):

$$F_2(\lambda) \simeq \frac{1}{2}f(0)\sqrt{\pi}\lambda^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}f'(0)\lambda^{-1} + \\ + \frac{1}{4}f''(0)\sqrt{\pi}\lambda^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\frac{f'''(0)}{3!}\lambda^{-2} + \ldots$$

2.3. Асимптотика интегралов Лапласа. В этом пункте рассмотрим интегралы Лапласа общего вида:

$$F(\lambda) = \int_{\Delta} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где Δ — конечный или бесконечный промежуток. Напомним, что здесь функции $f(x)$ и $S(x)$, определенные на Δ, принимают только действительные значения.

Для удобства введем одно новое понятие.

Определение. Точка $x_0 \in \Delta$ называется *точкой сильного минимума* функции $S(x)$ на промежутке Δ, если для любого $\delta > 0$ справедливо строгое неравенство

$$\inf_{\Delta \setminus O_\delta(x_0)} S(x) > S(x_0), \tag{2}$$

где, как обычно, $O_\delta(x_0)$ — δ-окрестность точки x_0.

Очевидно, если функция $S(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и только в точке $x_0 \in [a;b]$ принимает наименьшее значение, то точка x_0 является точкой сильного минимума функции $S(x)$ на отрезке $[a;b]$. Легко видеть, что в общем случае это утверждение является неверным.

Теорема 1. *Пусть интеграл* (1) *по промежутку* $\Delta = [a;b)$ *сходится абсолютно при некотором* $\lambda = \lambda_0$, *и пусть точка* $x = a$ *является точкой сильного минимума функции* $S(x)$ *на промежутке* $[a;b)$. *Тогда, если в точке* $x = a$ *функции* $f(x)$ *и* $S(x)$ *имеют конечные производные* $f'(a)$, $S'(a)$ *и* $S''(a)$, *причем* $S'(a) > 0$, *то при* $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \frac{e^{-\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}\left(f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right). \qquad (3)$$

Доказательство. Так как $S'(a) > 0$ и $S'(x)$ непрерывна (справа) в точке $x = a$, то

$$\exists\, \delta > 0: \quad S'(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a; a+\delta].$$

Интеграл (1) по промежутку $[a;b)$ представим в виде суммы двух интегралов

$$F(\lambda) = \int\limits_a^{a+\delta} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx + \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx. \qquad (4)$$

Очевидно, если $b < +\infty$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\delta < b - a$.

В интеграле по отрезку $[a; a+\delta]$ сделаем замену $y = \psi(x)$, где $\psi(x) = S(x) - S(a)$. Функция $y = \psi(x)$ на отрезке $[a; a+\delta]$ строго возрастает, $\psi(a) = 0$, $\psi(a+\delta) = \Delta S$, где $\Delta S = S(a+\delta) - S(a)$, и поэтому имеет обратную $x = \varphi(y)$, $y \in [0; \Delta S]$, причем $\varphi(y)$ дифференцируема и $\varphi'(y) = 1/S'(x)$. Таким образом,

$$\int\limits_a^{a+\delta} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx = e^{-\lambda S(a)} \int\limits_0^{\Delta S} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y}\,dy, \qquad (5)$$

где функция $g(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$ в точке $y = 0$ имеет конечную производную. Действительно,

$$g'(0) = \lim_{y\to+0} \frac{g(y) - g(0)}{y} = \frac{1}{S'(a)^2} \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)S'(a) - f(a)S'(x)}{S(x) - S(a)} =$$

$$= \frac{1}{S'(a)^3} \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)S'(a) - f(a)S'(x)}{x - a} =$$

$$= \frac{1}{S'(a)^3}\left(f'(a)S'(a) - f(a)S''(a)\right).$$

Следовательно, последний интеграл в равенстве (5) удовлетворяет всем условиям следствия 1 из предыдущего пункта. Поэтому при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_a^{a+\delta} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx = e^{-\lambda S(a)}\left(\frac{g(0)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right).$$

Положим $m_\delta = \inf\limits_{[a+\delta;b)} S(x)$. Тогда

$$\left|\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx\right| \leqslant \int\limits_{a+\delta}^{b} |f(x)|e^{-\lambda_0 S(x)}\,dx \cdot e^{-(\lambda-\lambda_0)m_\delta} \qquad (6)$$

для любого $\lambda > \lambda_0$ и любого $\delta > 0$. А так как $m_\delta > S(a)$, то из этого неравенства следует, что для любого $\delta > 0$ второй интеграл в равенстве (4) при $\lambda \to +\infty$ экспоненциально мал по сравнению с $e^{-\lambda S(a)}$, т.е. для асимптотики интеграла (1) при $\lambda \to +\infty$ имеет место *принцип локализации.* Теорема 1 доказана.

Замечание. Если, кроме условия $S'(a) > 0$, предположить, что функции $f(x)$ и $S(x)$ настолько гладкие в окрестности точки $x = a$, что функция $g(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$ в точке $y = 0$ имеет конечную производную n-го порядка, $n > 1$, то из леммы 2 предыдущего пункта следует, что

$$F(\lambda) = e^{-\lambda S(a)}\left(\frac{g(0)}{\lambda} + \frac{g'(0)}{\lambda^2} + \dots + \frac{g^{(n-1)}(0)}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. В частности, если функции $f(x)$ и $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в точке $x = a$, то при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \simeq e^{-\lambda S(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{\lambda^{k+1}}.$$

Теорема 2. *Пусть интеграл* (1) *по промежутку* $\Delta = [a;b)$ *сходится абсолютно при некотором* $\lambda > \lambda_0$, *и пусть точка* $x = a$ *является точкой сильного минимума функции* $S(x)$ *на промежутке* $[a;b)$. *Тогда, если в точке* $x = a$ *функции* $f(x)$ *и* $S(x)$ *имеют конечные производные* $f'(a)$, $S'(a)$, $S''(a)$ *и* $S'''(a)$, *причем* $S'(a) = 0$, *а* $S''(a) > 0$, *то при* $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}}\,e^{-\lambda S(a)}\left(f(a) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \qquad (7)$$

Доказательство. Так как $S''(a) > 0$ и $S''(x)$ непрерывна (справа) в точке $x = a$, то

$$\exists\,\delta > 0: \quad S''(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a; a+\delta].$$

А так как $S'(a) = 0$, то отсюда следует, что $S'(x) > 0 \ \forall\, x \in (a; a+\delta]$, и поэтому функция $S(x)$ строго возрастает на отрезке $[a; a+\delta]$.

Интеграл (1) по промежутку $[a; b)$ представим в виде суммы (4) двух интегралов по отрезку $[a; a+\delta]$ и по промежутку $[a+\delta; b)$.

В интеграле по отрезку $[a; a+\delta]$ сделаем замену $y = \psi(x)$, где

$$\psi(x) = \sqrt{S(x) - S(a)}.$$

Функция $y = \psi(x)$ на отрезке $[a; a+\delta]$ строго возрастает, $\psi(a) = 0$, $\psi(a+\delta) = \sqrt{\Delta S}$, где $\Delta S = S(a+\delta) - S(a)$, и поэтому имеет обратную $x = \varphi(y)$, $y \in [0; \sqrt{\Delta S}]$, причем $\varphi(y)$ дифференцируема:

$$\varphi'(y) = \frac{2}{S'(x)}\sqrt{S(x) - S(a)} \quad \forall\, x \in (a; a+\delta],$$

а в точке $y = 0$

$$\varphi'(0) = \sqrt{\frac{2}{S''(a)}},$$

так как

$$\psi'(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{\sqrt{S(x) - S(a)}}{x - a} = \sqrt{\frac{1}{2}S''(a)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^{a+\delta} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx = e^{-\lambda S(a)} \int\limits_0^{\sqrt{\Delta S}} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y^2}\,dy. \tag{8}$$

Простым вычислением показывается, что функция $g(y) = f(\varphi(y))\,\varphi'(y)$ в точке $y = 0$ имеет конечную производную. Следовательно, последний интеграл в равенстве (8) удовлетворяет всем условиям следствия 3 из предыдущего пункта. Поэтому при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_a^{a+\delta} f(x)e^{-\lambda S(x)}\,dx = e^{-\lambda S(a)}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,g(0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

А так как и в этом случае справедливо неравенство (6), т.е. имеет место принцип локализации, то формула (7) доказана. Теорема 2 доказана.

Замечание. Если, кроме условий, сформулированных в теореме 2, предположить, что функции $f(x)$ и $S(x)$ настолько гладкие в окрестности точки $x = a$, что функция $g(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$ в точке $y = 0$ имеет конечную производную n-го порядка, $n > 1$, то из леммы 5 предыдущего пункта следует, что при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\lambda^{-\frac{k+1}{2}} + O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}\right).$$

В частности, если функции $f(x)$ и $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в точке $x = a$, то при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \simeq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\lambda^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Пример 1. Найдем асимптотику функции Бесселя

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Здесь $f(\varphi) = \cos n\varphi$, $S(\varphi) = -\cos\varphi$. Функция $S(\varphi)$ в точке $\varphi = 0$ имеет сильный минимум, причем $S(0) = -1$, $S'(0) = 0$, $S''(0) = 1$.

По формуле (7) получаем

$$I_n(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right).$$

при $x \to +\infty$.

Пример 2. Найдем асимптотику полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n\, d\theta$$

при $n \to \infty$ для $x > 1$.

Перепишем этот интеграл в форме интеграла Лапласа:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{n\ln(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)}\, d\theta.$$

Здесь $\lambda = n$, $f(\theta) = 1$, $S(\theta) = -\ln(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta)$. Функция $S(\theta)$ имеет сильный минимум в точке $\theta = 0$, причем

$$S(0) = -\ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad S'(0) = 0, \quad S''(0) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}}.$$

По формуле (7) получаем

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi(x+\sqrt{x^2-1})}{n\sqrt{x^2+1}}}\cdot e^{n\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Таким образом, при $n\to+\infty$

$$P_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2n\pi}\sqrt[4]{x^2-1}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Теорема 3. *Пусть интеграл* (1) *по промежутку* $\Delta=(a;b)$ *сходится абсолютно при некотором* $\lambda=\lambda_0$, *и пусть точка* $x_0\in(a;b)$ *является точкой сильного минимума функции* $S(x)$ *на интервале* $(a;b)$. *Тогда, если в точке* x_0 *функции* $f(x)$ *и* $S(x)$ *имеют конечные производные* $f'(x_0)$, $S'(x_0)$, $S''(x_0)$, $S'''(x_0)$, *причем* $S'(x_0)=0$, *а* $S''(x_0)>0$, *то при* $\lambda\to+\infty$

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\,e^{-\lambda S(x_0)}\left(f(x_0)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \tag{9}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае

$$F(\lambda) = \int_a^{x_0} f(x)e^{-S(x)}\,dx + \int_{x_0}^{b} f(x)e^{-S(x)}\,dx.$$

Асимптотика второго интеграла получена в теореме 2, а первый интеграл заменой $x=-y$ сводится к рассмотренному виду. Действительно,

$$\int_a^{x_0} f(x)e^{-S(x)}\,dx = \int_{-x_0}^{-a} f(-y)e^{-S(y)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}e^{-\lambda S(x_0)}\left(f(x_0)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

при $\lambda\to+\infty$. Теорема 3 доказана.

Пример 3. Найдем асимптотику гамма-функции Эйлера.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$$

при $x\to+\infty$.

Очевидно,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t+x\ln t}\, dt.$$

Чтобы привести этот интеграл к виду (1), сделаем замену $t = xy$. Тогда

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-(y-\ln y)x}\, dy.$$

Мы пришли к интегралу вида (1), у которого $\lambda = x$, $S(y) = y - \ln y$, $S'(y) = 1 - \dfrac{1}{y}$. Функция $S(y)$ в точке $y = 1$ имеет сильный минимум, причем $S'(1) = 0$, $S''(y) = 1$. Поэтому по формуле (9) получаем

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Эта формула называется *формулой Стирлинга.* Из нее следует формула Стирлинга для $n!$:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

§ 3. Асимптотика интегралов Фурье

3.1. Теорема Римана об осцилляции и ее следствия. Рассмотрим интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_\Delta f(x) e^{i\lambda S(x)} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где Δ — конечный или бесконечный промежуток, а функции $f(x)$ и $S(x)$ определены на Δ и принимают действительные значения.

Интегралы вида (1) называются *интегралами Фурье*, а функция $S(x)$ называется его *фазой* или *фазовой функцией.*

Согласно теореме Римана об осцилляции, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на Δ, то

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_\Delta f(x) e^{i\lambda x} dx = 0. \tag{2}$$

Это утверждение легко обобщается на интегралы Фурье вида (1) в случае, когда фаза $S(x)$ на Δ не имеет стационарных точек, т.е. когда $S'(x) \neq 0$ на Δ.

Теорема 1. *Если на промежутке Δ функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, а функция $S(x)$ непрерывно дифференцируема и $S'(x) \neq 0$, то*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция $f(x)$ такая, что

$$\int_{\Delta} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{4}$$

По определению, функция $f_\varepsilon(x)$ является линейной комбинацией функций, каждая из которых имеет вид "единичной ступеньки": она равна нулю вне некоторого отрезка $[\alpha;\beta]$ и единице на интервале $(\alpha;\beta)$. А так как

$$\int_\alpha^\beta e^{i\lambda S(x)}dx = \frac{1}{i\lambda S'(x)} e^{i\lambda S(x)}\Big|_\alpha^\beta - \frac{1}{i\lambda}\int_\alpha^\beta \frac{1}{S'(x)} e^{i\lambda S(x)}dx,$$

то

$$\int_\alpha^\beta e^{i\lambda S(x)}dx = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует λ_ε такое, что если $\lambda > \lambda_\varepsilon$, то

$$\left|\int_{\Delta} f_\varepsilon(x) e^{i\lambda S(x)} dx\right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > \lambda_\varepsilon \quad |F(\lambda)| < 2\varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

Эту теорему тоже будем называть *теоремой Римана об осцилляции.* Отметим, что в этой теореме, даже в случае, когда $S(x) \equiv x$, ничего не говорится о скорости стремления интеграла Фурье к нулю при $\lambda \to +\infty$. В действительности, эта скорость существенно зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$, а в общем случае — и от свойств спектральной функции $S(x)$.

В дальнейшем будем предполагать, что промежуток Δ — конечный, точнее, будем считать, что Δ — это некоторый отрезок $[a;b]$, хотя многие результаты естественным образом переносятся и на интегралы Фурье по бесконечным промежуткам.

Теорема 2. *Пусть на отрезке* $\Delta = [a;b]$ *функции* $f(x)$ *и* $S(x)$ *имеют непрерывные производные* $f'(x)$, $S'(x)$ *и* $S''(x)$. *Тогда, если* $S'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a;b]$, *то при* $\lambda \to +\infty$

$$F(x) = \frac{f(b)}{i\lambda S'(b)}e^{i\lambda S(b)} - \frac{f(a)}{i\lambda S'(a)}e^{i\lambda S(a)} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{6}$$

Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$F(x) = \frac{f(x)}{i\lambda S(x)}e^{i\lambda S(x)}\Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda}\int\limits_a^b f_1(x)e^{i\lambda S(x)}dx,$$

где

$$f_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right).$$

А так как функция $f_1(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то, согласно теореме 1,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_a^b f_1(x)e^{i\lambda S(x)}dx = 0,$$

что и доказывает асимптотическое равенство (6).

Заметим, что с помощью интегрирования по частям можно получать асимптотики и некоторых других классов интегралов.

Пример. Вычислим асимптотику интеграла

$$\Phi(x) = \int\limits_x^{+\infty} e^{it^2}\,dt \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\Phi(x) = \frac{1}{2it}e^{it^2}\Big|_x^{+\infty} + \frac{1}{2i}\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{it^2}\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2ix}e^{ix^2} + \frac{1}{(2i)^2}\cdot\frac{1}{t^3}e^{it^2}\Big|_x^{+\infty} + \frac{3}{(2i)^2}\int\limits_x^{+\infty}\frac{1}{t^4}e^{it^2}\,dt.$$

А так как

$$\left|\int\limits_x^{+\infty}\frac{3}{t^4}e^{it^2}\,dt\right| \leqslant \int\limits_x^{+\infty}3t^{-4}\,dt = x^{-3},$$

то

$$\Phi(x) = \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Интегрированием по частям доказывается следующее общее утверждение.

Следствие. *Пусть на отрезке* $[a;b]$ *функции* $f(x)$ *и* $S(x)$ *имеют непрерывные производные* n*-го и соответственно* $(n+1)$*-го порядка. Тогда, если* $S'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [a;b]$, *то при* $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(i\lambda)^{k+1}} \left(a_k e^{i\lambda S(a)} + b_k e^{i\lambda S(b)}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right),$$

где коэффициент a_k *зависит только от значений функций* $f(x)$ *и* $S(x)$ *и их производных до* k*-го и соответственно до* $(k+1)$*-го порядка в точке* $x = a$, *а* b_k *— только от значений этих функций и этих производных в точке* $x = b$.

В следующих пунктах рассмотрим интегралы Фурье вида (1) по отрезку $[a;b]$ в случае, когда фаза $S(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет стационарную точку.

3.2. Идея метода стационарной фазы. Для вычисления асимптотики интеграла Фурье

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)}\, dx \tag{1}$$

при $\lambda \to +\infty$ в случае, когда фазовая функция $S(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет стационарные точки, Стоксом был предложен метод, который получил название *метода стационарной фазы.*

Чтобы описать идею метода стационарной фазы, не вдаваясь в технические подробности, будем предполагать, что функции $f(x)$ и $S(x)$ достаточно гладкие, и что фазовая функция $S(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет только одну стационарную точку.

Напомним, что точка $x_0 \in [a;b]$ называется стационарной точкой функции $S(x)$, если $S'(x_0) = 0$. Если, кроме того, $S''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 называется *невырожденной стационарной точкой* функции $S(x)$.

Простейшими интегралами вида (1), у которых фазовая функция $S(x)$ на промежутке интегрирования имеет невырожденную стационарную точку, являются интегралы

$$\Phi(\lambda) = \int_0^b e^{\pm i\lambda x^2}\, dx. \tag{2}$$

Вычислим асимптотику этих интегралов при $\lambda \to +\infty$.

Лемма. *Для любого* $b > 0$ *при* $\lambda \to +\infty$

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{\pm i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{3}$$

Доказательство. После замены $t = x\sqrt{\lambda}$ получаем

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_0^{b\sqrt{\lambda}} e^{\pm it^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_0^{+\infty} e^{\pm it^2}\, dt - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_{b\sqrt{\lambda}}^{+\infty} e^{\pm it^2}\, dt.$$

А так как интеграл от 0 до $+\infty$ — это интеграл Френеля, который равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$, то

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{\pm i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int\limits_{b\sqrt{\lambda}}^{+\infty} e^{\pm it^2}\, dt.$$

Наконец, после интегрирования по частям для последнего интеграла получаем оценку:

$$\left| \int\limits_{b\sqrt{\lambda}}^{+\infty} e^{\pm it^2} dt \right| \leqslant \frac{1}{b\sqrt{\lambda}}.$$

Лемма доказана.

Таким образом, главный член асимптотики интеграла (2) определяется интегралом по любой малой окрестности стационарной точки фазовой функции. В следующем пункте будет доказано, что этот принцип локализации, называемый *принципом стационарной фазы*, имеет место и для интегралов Фурье общего вида.

Для уяснения сущности метода стационарной фазы рассмотрим несколько примеров на формальное применение этого метода.

Пример 1. Пусть $x_0 = a$, $f(a) \neq 0$, $S'(a) = 0$, $S''(a) \neq 0$ и $S'(x) \neq 0$ на промежутке $(a; b]$. Тогда для любого достаточно малого $\delta > 0$

$$F(\lambda) \sim \int\limits_a^{a+\delta} f(x) e^{i\lambda S(x)}\, dx \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

А так как $f(x) = f(a) + o(1)$ и

$$S(x) = S(a) + \frac{1}{2} S''(a)(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$$

при $x \to a$, то естественно считать, что при $\lambda \to +\infty$

$$\int_a^{a+\delta} f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx \sim f(a)e^{i\lambda S(a)} \int_a^{a+\delta} e^{i\lambda\frac{1}{2}S''(a)(x-a)^2}\,dx =$$

$$= f(a)e^{i\lambda S(a)} \int_0^{\delta} e^{i\lambda\frac{1}{2}S''(a)x^2}\,dx.$$

Если $S''(a) > 0$, то в последнем интеграле сделаем замену:

$$t = x\sqrt{\frac{1}{2}S''(a)}.$$

Тогда, в силу доказанной леммы,

$$\int_0^{\delta} e^{i\lambda\frac{1}{2}S''(a)x^2}\,dx \sim \sqrt{\frac{2}{S''(a)}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

при $\lambda \to +\infty$, и поэтому

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2}f(a)e^{i\lambda S(a)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}. \qquad (4)$$

Если же $S''(a) < 0$, то, полагая $t = x\sqrt{-\frac{1}{2}S''(a)}$, получаем

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2}f(a)e^{i\lambda S(a)}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(a)}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad (5)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Пример 2. Пусть $x_0 \in (a;b)$, $f(x_0) \neq 0$, $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$ и $S'(x) \neq 0$ $\forall\, x \neq x_0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \sim \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx \sim f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\lambda\frac{1}{2}S''(x_0)x^2}\,dx.$$

Последний интеграл есть сумма двух интегралов: от $-\delta$ до 0 и от 0 до δ. Каждый из этих интегралов оценим по формуле (4) или (5). Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \sim f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}}\,e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}S''(x_0)}. \qquad (6)$$

В следующих пунктах формулы (4), (5) и (6) будут строго доказаны.

3.3. Вклад в асимптотику от невырожденной стационарной точки. Сначала рассмотрим канонические интегралы вида

$$\Phi(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{\pm i\lambda x^2}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Очевидно, для функции $S(x) = \pm x^2$ только точка $x = 0$ является стационарной, так как $S'(0) = 0$ и $S'(x) \neq 0 \ \ \forall x \neq 0$, причем она является невырожденной, так как $S''(0) \neq 0$. Случай, когда $0 < a$ или $b < 0$, рассмотрен в предыдущем пункте. Здесь рассмотрим случай, когда $a \leqslant 0 \leqslant b$.

Лемма. *Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0; b]$, то при $\lambda \to +\infty$*

$$\int_0^b f(x)e^{\pm i\lambda x^2}dx = \frac{1}{2}f(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{\pm i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = f(0) + xg(x),$$

где $g(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - f(0))$ для $x \in (0; b]$ и $g(0) = f'(0)$.

Функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0; b]$, так как

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x) + f(0)}{x^2} \quad \forall x \in (0; b],$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{1}{2}f''(0).$$

Таким образом,

$$\int_0^b f(x)e^{\pm i\lambda x^2}dx = f(0)\int_0^b e^{\pm i\lambda x^2}dx + \int_0^b xg(x)e^{\pm i\lambda x^2}dx. \tag{3}$$

Очевидно,

$$\int_0^b xg(x)e^{\pm i\lambda x^2}dx = \pm\frac{1}{2i\lambda}g(x)e^{\pm i\lambda x^2}\Big|_0^b \mp \frac{1}{2i\lambda}\int_0^b g'(x)e^{\pm i\lambda x^2}dx,$$

и поэтому при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^b xg(x)e^{\pm i\lambda x^2}dx = O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4}$$

Легко видеть, что из соотношений (3) и (4) и леммы из предыдущего пункта следует асимптотическое равенство (2). Лемма доказана.

Теперь рассмотрим интеграл Фурье общего вида

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ дважды, а функция $S(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы. Тогда, если $S'(a) = 0$ и $S'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b]$, а $S''(a) > 0$, то при $\lambda \to +\infty$*

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}dx = \frac{1}{2}f(a)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}}\,e^{i\lambda S(a)}e^{i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{6}$$

Если же $S''(a) < 0$, то при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \frac{1}{2}f(a)\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(a)}}\,e^{i\lambda S(a)}e^{-i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Так как $S''(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $S''(a) > 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что $a + \delta < b$ и

$$S''(x) > 0 \quad \forall x \in [a; a+\delta].$$

Интеграл от a до b представим в виде суммы двух интегралов: от a до $a+\delta$ и от $a+\delta$ до b.

Для оценки интеграла от a до $a+\delta$ сделаем замену $t = \psi(x)$, где

$$\psi(x) = \sqrt{S(x) - S(a)}.$$

Мы уже показывали, что на отрезке $[a; a+\delta]$ эта функция строго возрастает и имеет обратную $x = \varphi(t)$, $t \in [0; \sqrt{\Delta S}]$, которая непрерывно дифференцируема.

Следовательно,

$$\int\limits_a^{a+\delta} f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = e^{i\lambda S(a)} \int\limits_0^{\sqrt{\Delta S}} g(t)e^{i\lambda t^2}\,dt,$$

где $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Как и при доказательстве теоремы 2 в п. 2.3, можно убедиться, что функция $g(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0; \Delta S]$. Поэтому, согласно лемме, при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^{\sqrt{\Delta S}} g(t)e^{i\lambda t^2}\,dt = \frac{1}{2}g(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где

$$g(0) = f(a)\varphi'(0) = \frac{f(a)}{\psi'(a)},$$

$$\psi'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{S(x)-S(a)}}{x-a} = \sqrt{\frac{1}{2}S''(a)}.$$

Следовательно, при $\lambda \to +\infty$

$$\int_a^{a+\delta} f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \frac{1}{2}f(a)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}}\,e^{i\lambda S(a)}e^{\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (8)$$

В предыдущем пункте 3.1 было доказано, что при $\lambda \to +\infty$

$$\int_{a+\delta}^{b} f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (9)$$

для любого $\delta > 0$. Отсюда и из (8) получаем асимптотическое равенство (6).

Если же $S''(a) < 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что $a + \delta < b$ и

$$S''(a) < 0 \quad \forall\, x \in [a; a+\delta].$$

Для оценки интеграла от a до $a + \delta$ сделаем замену $t = \psi(x)$, где

$$\psi(x) = \sqrt{S(a) - S(x)}, \quad x \in [a; a+\delta].$$

Через $x = \varphi(t)$, $t \in [0; \sqrt{-\Delta S}]$, где $\Delta S = S(a+\delta) - S(a)$, обозначим функцию, обратную к функции $t = \psi(t)$. Тогда

$$\int_a^{a+\delta} f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = e^{i\lambda S(a)}\int_0^{\sqrt{-\Delta S}} g(t)e^{-i\lambda t^2}\,dt =$$

$$= e^{i\lambda S(a)}\frac{1}{2}g(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}f(a)\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(a)}}e^{i\lambda S(a)}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Отсюда и из соотношения (9) следует асимптотическое равенство (7). Теорема 1 доказана.

Обычно формулы (6) и (7) записывают в виде одной формулы. А именно, если $S''(a) \neq 0$, то при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} f(a)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(a)|}}\, e^{i\lambda S(a)} e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (11)$$

Теорема 2. *Пусть на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ дважды, а функция $S(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы. Тогда, если существует $x_0 \in (a;b)$ такое, что*

$$S'(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad S'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a;b], \quad x \neq x_0,$$

а $S''(x_0) \neq 0$, то при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx =$$

$$= f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}}\, e^{i\lambda S(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (12)$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_{x_0}^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}} \cdot e^{i\lambda S(x_0)} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

А в интеграле от a до x_0 сделав замену $x = -\xi$, получим интеграл

$$\int\limits_a^{x_0} f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \int\limits_{-x_0}^{-a} f(-\xi)e^{i\lambda S(-\xi)}\,d\xi,$$

для которого, очевидно, справедлива такая же асимптотическая оценка. Следовательно, для интеграла от a до b справедлива формула (12). Теорема 2 доказана.

Пример. Вычислим асимптотику функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi \tag{13}$$

при $x \to +\infty$, где n — неотрицательное целое число.

Прежде всего заметим, что

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)}\,d\varphi, \tag{14}$$

т.е. функция (13) имеет вид интеграла Фурье (14), где $\lambda = x$, $f(\varphi) = e^{-in\varphi}$, $S(\varphi) = \sin\varphi$. Фаза $S(\varphi)$ на отрезке $[0; 2\pi]$ имеет две стационарные точки $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$, причем

$$S(\varphi_1) = 1, \quad S''(\varphi_1) = 1, \quad S(\varphi_2) = -1, \quad S''(\varphi_2) = 1.$$

Интеграл (14) представим в виде суммы двух интегралов: от 0 до π и от π до 2π, и к каждому из них применим формулу (12). Тогда при $x \to +\infty$

$$\int\limits_0^{\pi} f(\varphi)e^{ix\sin\varphi}d\varphi = e^{-in\frac{\pi}{2}}e^{ix}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi} f(\varphi)e^{ix\sin\varphi}d\varphi = e^{-in\frac{3\pi}{2}}e^{-ix}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Складывая почленно эти асимптотические равенства, получаем:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

при $x \to +\infty$.

Глава 17

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Метрические пространства

1.1. Определения и примеры. Многие важные понятия и утверждения математического анализа, в частности, связанные с пределами и непрерывностью, опираются на понятие расстояния. Причем сами определения этих понятий, а также формулировки и доказательства соответствующих утверждений во многих случаях не зависят от конкретного способа задания расстояния. В них используются лишь основные свойства расстояния: неотрицательность, симметрия и неравенство треугольника. Формализация этих свойств расстояния приводит к понятию метрического пространства.

Определение 1. Говорят, что на множестве M задана *метрика*, если на прямом произведении $M \times M$ задана функция $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1. $\rho(x,y) \geqslant 0 \quad \forall\, x, y \in M$;
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall\, x, y \in M$;
3. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall\, x, y, z \in M$;
4. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall\, x, y \in M$.

Эти свойства называются *аксиомами метрики* (или *расстояния*). В частности, свойство 3 называется *неравенством треугольника*.

Определение 2. Множество, на котором задана некоторая метрика, называется *метрическим пространством*. Элементы метрического пространства называются *точками*.

Метрическое пространство, точками которого являются элементы множества M и на котором задана метрика ρ, будем обозначать $\{M; \rho\}$. Заметим, что на одном и том же множестве можно задавать разные метрики, в результате получаются разные метрические пространства. И наоборот, на разных множествах метрика может быть задана по одному и тому же правилу.

Примером метрического пространства является n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, элементами (точками) которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n действи-

тельных чисел и в котором расстояние между любыми двумя точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ определено по формуле

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j|^2 \right)^{1/2} \qquad (1)$$

Известно (см. § 1 гл. 6), что функция (1) удовлетворяет всем аксиомам метрики.

Легко видеть, что функции

$$\rho_0(x, y) = \max_j |y_j - x_j|, \qquad (2)$$

$$\rho_1(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j| \qquad (3)$$

тоже удовлетворяют всем аксиомам метрики.

Другим примером метрического пространства является пространство $\mathbb{C}^n$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n комплексных чисел и в котором метрика определена по формуле (1). Очевидно, что функции (2) и (3) на $\mathbb{C}^n$ тоже удовлетворяют всем аксиомам метрики.

Определение 3. Пусть задано метрическое пространство $\{M; \rho\}$ и некоторое подмножество M_1 множества M. Тогда метрическое пространство $\{M_1; \rho\}$ называется *подпространством метрического пространства* $\{M; \rho\}$.

Заметим, что в этом определении нет никаких ограничений на множество $M_1 \subset M$. В частности, оно может содержать лишь конечное число точек и даже только одну точку множества M.

В тех случаях, когда не возникает неясностей, метрическое пространство $\{M; \rho\}$ обозначают просто M. В этом смысле говорят, что любое подмножество метрического пространства является метрическим пространством (с той же метрикой).

Очевидно, метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ является подпространством метрического пространства $\mathbb{C}^n$, в котором метрика определена по формуле (1). А пространство $\mathbb{Q}^n$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n рациональных точек и в котором метрика определена по формуле (1), является подпространством пространства $\mathbb{R}^n$. Аналогичные утверждения справедливы и в том случае, когда метрика определена по формулам (2) или (3).

В метрическом пространстве естественным образом определяются ε-окрестность точки, предел последовательности, предельная точка множества, открытое множество и т.д. Приведем для примера некоторые определения.

Определение 4. Для любой точки x_0 метрического пространства $\{M;\rho\}$ и любого $\varepsilon > 0$ множество всех точек $x \in M$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, x_0) < \varepsilon$, называется *$\varepsilon$-окрестностью точки* x_0 и обозначается $O_\varepsilon(x_0)$.

Для любого $r > 0$ множество $O_r(x_0)$ называют еще *открытым шаром радиуса r с центром в точке* x_0.

Определение 5. Точка x_0 метрического пространства M называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ точек из M, если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad x_n \in O_\varepsilon(x_0). \tag{4}$$

Очевидно, условие (4) равносильно условию

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0. \tag{5}$$

Если выполнено условие (4) (или (5)), то будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0, и писать:

$$x_n \to x_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Последовательность точек метрического пространства может сходиться только к одной точке. Действительно, если $x_n \to x$ и $x_n \to y$ при $n \to \infty$, то

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \to 0$$

при $n \to \infty$, поэтому $\rho(x, y) = 0$, и, следовательно, $x = y$.

Определение 6. Множество $X \subset M$ называется *ограниченным*, если существует точка $x_0 \in M$ и число $r > 0$ такое, что $X \subset O_r(x_0)$.

Очевидно, если последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ сходится к точке $x_0 \in M$, то эта последовательность ограничена.

Действительно, так как $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\exists C : \quad \rho(x_n, x_0) \leqslant C \quad \forall n.$$

Определение 7. Пусть G — множество точек метрического пространства $\{M;\rho\}$. Точка $x_0 \in M$ называется *точкой прикосновения множества* $G \subset M$, если в любой ε-окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка множества G.

Множество всех точек прикосновения множества $G \subset M$ называется *замыканием множества* G и обозначается $\overline{G}$.

Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

Множество всех точек ε-окрестности точки x_0, отличных от x_0, называется *проколотой ε-окрестностью точки* x_0 и обозначается $\overset{\bullet}{O}_\varepsilon(x_0)$.

Точка $x_0 \in M$ называется *предельной точкой множества* $G \subset M$, если в любой проколотой ε-окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка множества G.

Очевидно, замыкание множества G получается присоединением к G всех его предельных точек.

Определение 8. Точка $x_0 \in M$ называется *граничной точкой множества* $G \subset M$, если в любой ε-окрестности точки x_0 имеется хотя бы по одной точке как из G, так и из $M \backslash G$.

Множество всех граничных точек множества G называется *границей множества* G и обозначается ∂G.

Как обычно доказывается, что граница любого множества $G \subset M$ является замкнутым множеством.

Легко видеть, что для любого множества $G \subset M$ справедливо равенство $\overline{G} = G \cup \partial G$.

Определение 9. Точка x_0 множества $G \subset M$ называется *внутренней*, если существует такое $\delta > 0$, что $O_\delta(x_0) \subset G$. Множество G называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Очевидно, множество всех точек метрического пространства является одновременно открытым и замкнутым. По определению считают, что пустое множество тоже одновременно открытое и замкнутое.

Для примера рассмотрим метрическое пространство точек некоторого числового промежутка Δ с естественной метрикой. В этом пространстве множество Δ является одновременно и открытым, и замкнутым. В частности, если, например, $\Delta = (-1; 2)$, то множество точек интервала $(0; 1)$ открыто, его замыкание равно отрезку $[0; 1]$. Множество $(0; 2)$ тоже открыто, но его замыкание равно промежутку $[0; 2)$.

В конце приведем несколько свойств открытых и замкнутых множеств метрического пространства.

Лемма 1. *Множество $G \subset M$ открыто тогда и только тогда, когда множество $F = M \backslash G$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть G открыто, и пусть $x_0 \in G$. Тогда

$$\exists\, \delta > 0: \quad O_\delta(x_0) \subset G,$$

и поэтому точка $x_0 \in G$ не может быть точкой прикосновения множества $F = M \backslash G$. Следовательно, любая точка прикосновения множества F принадлежит F, т.е. F замкнуто.

Пусть теперь множество $F = M \setminus G$ замкнуто, и пусть $x_0 \in G$. Тогда точка x_0 не может быть предельной точкой для F, поэтому

$$\exists\, \delta > 0: \quad \forall x \in O_\delta(x_0) \quad x \notin F,$$

и, следовательно, $O_\delta(x_0) \subset G$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Объединение любой совокупности открытых множеств есть открытое множество. Пересечение любой совокупности замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть задана некоторая совокупность (конечная или бесконечная) открытых множеств $G_\alpha \subset M$. Тогда если $x_0 \in G = \bigcup_\alpha G_\alpha$, то $\exists\,\alpha : x \in G_\alpha$. А так как G_α открыто, то

$$\exists\,\delta > 0 : \quad O_\delta(x_0) \subset G_\alpha,$$

и поэтому $O_\delta(x_0) \subset G$. Следовательно, множество G открытое.

Второе утверждение следует из леммы 1. Действительно, пусть задана совокупность замкнутых множеств $F_\alpha \subset M$, и пусть $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$. Множества $G_\alpha = M \backslash F_\alpha$ и $G = \bigcap_\alpha G_\alpha$ открытые. А так как $F = M \backslash G$, то множество F замкнутое. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пересечение любой конечной совокупности открытых множеств есть открытое множество. Объединение любой конечной совокупности замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть множество G есть пересечение открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$. Если G пусто, то оно открыто. Пусть $x_0 \in G$. Тогда $x_0 \in G_j$ при любом $j = 1, 2, \ldots, n$, а так как G_j открытые, то

$$\forall j \quad \exists\, r_j > 0 : \quad O_{r_j}(x_0) \subset G_j.$$

Очевидно, $O_r(x_0) \subset G$, где $r = \min\limits_j r_j$.

Второе утверждение следует из леммы 1. Лемма 3 доказана.

1.2. Полные и неполные метрические пространства. Как и для точек на плоскости и в пространстве, последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства $\{M; \rho\}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если она удовлетворяет условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \quad \forall n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Это условие, как и раньше, будем называть *условием Коши.*

Очевидно, если последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства M имеет предел в этом пространстве, т.е. если

$$\exists\, x_0 \in M : \quad \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0, \tag{2}$$

то эта последовательность удовлетворяет условию Коши. Действительно, если выполнено условие (2), то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2},$$

и поэтому

$$\forall n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \varepsilon.$$

В общем случае обратное утверждение является неверным. Например, числовое множество

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} \tag{3}$$

с естественной метрикой является метрическим пространством. В нем последовательность

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

является фундаментальной, но не имеет предела в M. Легко видеть, что если к множеству (3) присоединить точку $x_0 = 0$, то в новом метрическом пространстве последовательность (4) имеет предел. Более того, в этом пространстве любая фундаментальная последовательность имеет предел. (Докажите это утверждение!)

Определение 1. Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек имеет предел в этом пространстве. В противном случае метрическое пространство называется *неполным*.

Как мы уже знаем, пространство $\mathbb{R}^n$ является полным, а пространство $\mathbb{Q}^n$ является неполным. Приведем еще несколько примеров полных и неполных метрических пространств.

Пример 1. Пространство $C([a;b])$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)| \tag{5}$$

является полным.

Действительно, если последовательность функций $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна относительно метрики (5), то при любом фиксированном $x \in [a;b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной, и поэтому имеет предел (в силу полноты пространства $\mathbb{R}$). Обозначим этот предел $f(x)$. Очевидно $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ по метрике (5). Действительно, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n, m \geqslant N_\varepsilon \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

для любого $x \in [a;b]$. Зафиксируем x и перейдем к пределу при $m \to \infty$, в пределе для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ получим неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Следовательно, последовательность непрерывных на $[a;b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$. Ранее было доказано, что тогда функция $f(x)$ тоже непрерывна на $[a;b]$. Полнота пространства $C([a;b])$ доказана.

Пример 2. Пространство ограниченных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой (5) является полным.

Действительно, как и в примере 1, доказывается, что если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ фундаментальна относительно метрики (5), то она сходится к некоторой функции $f(x)$, $x \in [a;b]$, в метрике (5). Тогда

$$\exists n_1 : \sup_{x\in[a;b]} |f_{n_1}(x) - f(x)| < 1,$$

и поэтому для любого $x \in [a;b]$

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leqslant 1 + \sup_{x\in[a;b]} |f_{n_1}(x)|.$$

Следовательно, функция $f(x)$ ограничена, что и доказывает полноту рассматриваемого метрического пространства.

Аналогично доказывается, что множество всех ограниченных числовых последовательностей с метрикой

$$\rho(\{\xi^k\}, \{\eta^k\}) = \sup_k |\xi^k - \eta^k| \tag{6}$$

является полным метрическим пространством.

Пример 3. Множество всех сходящихся последовательностей действительных чисел с метрикой (6) является полным метрическим пространством.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов этого пространства фундаментальна относительно метрики (6). Тогда если $x_n = \{\xi_n^k\}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n, m \geqslant N_\varepsilon \quad |\xi_n^k - \xi_m^k| < \varepsilon \quad \forall k. \tag{7}$$

Отсюда следует, что при фиксированном k числовая последовательность $\{\xi_n^k\}$ сходится. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n^k = \xi^k.$$

Тогда, переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (7), получаем:

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon \quad |\xi_n^k - \xi^k| \leqslant \varepsilon \quad \forall k,$$

т.е.

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \sup_k |\xi_n^k - \xi^k| \leqslant \varepsilon,$$

а это означает, что $x_n \to x = \{\xi^k\}$ при $n \to \infty$.

Осталось показать, что последовательность $\{\xi^k\}$ сходящаяся.

Для любых k, p и n имеем:

$$|\xi^k - \xi^{k+p}| \leqslant |\xi^k - \xi_n^k| + |\xi_n^k - \xi_n^{k+p}| + \\ + |\xi_n^{k+p} - \xi^{k+p}| \leqslant 2\rho(x, x_n) + |\xi_n^k - \xi_n^{k+p}|. \tag{8}$$

Из того, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$, следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \quad \rho(x, x_{n_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{3},$$

а из сходимости последовательности $x_{n_\varepsilon} = \{\xi^k_{n_\varepsilon}\}$ следует, что

$$\exists K_\varepsilon : \quad \forall k \geqslant K_\varepsilon, \forall p \quad \left|\xi^k_{n_\varepsilon} - \xi^{k+p}_{n_\varepsilon}\right| < \varepsilon/3,$$

и поэтому

$$\forall k \geqslant K_\varepsilon, \forall p \quad \left|\xi^k - \xi^{k+p}\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $x = \{\xi^k\}$ сходящаяся.

Рассмотрим еще пример неполного метрического пространства.

Пример 4. В множестве функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a; b]$, введем метрику по формуле

$$\rho(f; g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \tag{9}$$

Покажем, что это метрическое пространство является неполным.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in [-1; -1/n], \\ nx, & \text{если } x \in [-1/n; 1/n], \\ +1, & \text{если } x \in [1/n; 1]. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, для любых n и p

$$\int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|\, dx \leqslant \int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - \operatorname{sgn} x|\, dx +$$
$$+ \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn} x - f_n(x)|\, dx = \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n},$$

и поэтому последовательность непрерывных функций (10) фундаментальна относительно метрики (9). Легко видеть, что в этой метрике она сходится к разрывной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in$ $\in [-1; 1]$. Покажем, что в множестве непрерывных функций предела нет.

Предположим противное: пусть последовательность (10) в метрике (9) сходится к непрерывной функции $g(x)$, $x \in [-1; 1]$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = 0,$$

причем функция $F(x) = f(x) - g(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[-1; 1]$, кроме точки $x = 0$. Следовательно, $g(x) = f(x)$ для любого $x \neq 0$ из отрезка $[-1; 1]$, что противоречит предположению, что $g(x)$ непрерывна на $[-1; 1]$.

Последнее утверждение является следствием следующей простой леммы.

Лемма. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ и*

$$\int_{\Delta} |f(x)|\, dx = 0,$$

то $f(x) = 0$ в любой точке $x \in \Delta$, в которой функция f непрерывна.

Действительно, если функция f непрерывна в точке $x_0 \in \Delta$ и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0, в которой $|f(x)| > 0$, и поэтому тогда

$$\int_{\Delta} |f(x)|\, dx \geqslant \int_{\Delta \cap O(x_0)} |f(x)|\, dx > 0.$$

Другие примеры полных и неполных пространств будут рассмотрены в дальнейшем. А сейчас для метрических пространств докажем одно обобщение теоремы о вложенных отрезках.

Для любого множества E точек метрического пространства $\{M; \rho\}$ величина $\sup\limits_{x,y \in E} \rho(x, y)$ называется *диаметром множества* E и обозначается $d(E)$.

Очевидно, множество E ограничено тогда и только тогда, когда $d(E) < \infty$.

Определение 2. Последовательность $\{E_n\}$ непустых множеств метрического пространства называется *последовательностью Коши*, если $E_{n+1} \subset E_n$ $\forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} d(E) = 0$.

Теорема. *В полном метрическом пространстве всякая последовательность Коши $\{F_n\}$ замкнутых множеств имеет одну общую точку.*

Доказательство. В каждом F_n выберем по точке x_n. Легко видеть, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, а так как пространство полное, то она сходится к некоторой точке x_0 этого пространства.

Точка x_0 является точкой прикосновения для любого множества F_n. В силу замкнутости F_n, точка x_0 принадлежит любому F_n. Существование общей точки доказано, единственность следует из того, что $d(F_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Сделаем еще несколько замечаний о связи понятий полноты и замкнутости.

Замечание 1. Если метрическое пространство $\{M; \rho\}$ полное, а множество $X \subset M$ замкнуто, то метрическое пространство $\{X; \rho\}$ полное.

Действительно, любая фундаментальная последовательность точек $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторой точке $x_0 \in M$, которая является точкой прикосновения множества X. А так как X замкнуто, то $x_0 \in X$.

Замечание 2. Пусть заданы метрическое пространство $\{M; \rho\}$ и некоторое множество $X \subset M$. Тогда если метрическое пространство $\{X; \rho\}$ полное, то множество X замкнуто.

Действительно, пусть x_0 — точка прикосновения множества $X \subset M$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in X$, лежащая в шаре $O_{1/n}(x_0)$. Очевидно, последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x_0 \in M$, а так как пространство $\{X; \rho\}$ полное, то $x_0 \in X$.

1.3. Теорема о пополнении метрических пространств. Метрические пространства $\{M; \rho\}$ и $\{M'; \rho'\}$ называются *изометричными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества M на множество M' такое, что для любых x и y из M справедливо равенство $\rho(x, y) = \rho'(f(x), f(y))$.

Очевидно, изометричные пространства обладают одинаковыми свойствами (конечно, лишь теми свойствами, которые связаны только с метрикой), и, следовательно, при изучении метрических свойств изометричные пространства неразличимы. Поэтому если метрическое пространство $\{M; \rho\}$ изометрично некоторому подпространству метрического пространства $\{M^*; \rho^*\}$, то говорят, что *метрическое пространство $\{M; \rho\}$ содержится в метрическом пространстве $\{M^*; \rho^*\}$*.

Определение 1. Множество M' элементов метрического пространства M называется *плотным в M*, если его замыкание совпадает с M.

Определение 2. Полное метрическое пространство M^* называется *пополнением метрического пространства M*, если M содержится в M^* и плотно в нем.

Теорема. *Любое метрическое пространство имеет пополнение.*

Доказательство. Пусть $\{M;\rho\}$ — заданное метрическое пространство. Построим новое метрическое пространство $\{M^*;\rho^*\}$, которое содержит пространство $\{M;\rho\}$.

Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ элементов из M, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$, будем называть *эквивалентными* и писать $\{x_n\}\sim\{y_n\}$. Очевидно, если $\{x_n\}\sim\{y_n\}$, а $\{y_n\}\sim\{z_n\}$, то $\{x_n\}\sim\{z_n\}$, и поэтому множество всех последовательностей в M распадается на непересекающиеся классы эквивалентных последовательностей. Нас будут интересовать только фундаментальные последовательности.

Итак, в пространстве $\{M;\rho\}$ рассмотрим множество всех фундаментальных последовательностей, и через M^* обозначим множество всех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей. Если фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ принадлежит классу x^*, то, как обычно, будем писать $\{x_n\}\in x^*$. В множестве M^* определим метрику.

Очевидно,

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(x_m,y_m)+\rho(y_m,y_n)$$

для любых n и m, и поэтому

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_m,y_n).$$

Отсюда следует, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальные, то числовая последовательность $\rho(x_n,y_n)$, $n\in\mathbb{N}$, — тоже фундаментальная и, следовательно, имеет предел. Тогда если $\{x_n\}\in x^*$, $\{y_n\}\in y^*$, то расстояние между x^* и y^* определим по формуле

$$\rho(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

Прежде всего покажем, что это определение не зависит от выбора последовательностей из классов x^* и y^*.

Пусть $\{x'_n\}\in x^*$ и $\{y'_n\}\in y^*$. Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\rho(x'_n,y'_n)&\leqslant\rho(x'_n,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y'_n),\\ \rho(x_n,y_n)&\leqslant\rho(x_n,x'_n)+\rho(x'_n,y'_n)+\rho(y'_n,y_n),\end{aligned}$$

и поэтому

$$|\rho(x'_n,y'_n)-\rho(x_n,y_n)|\leqslant\rho(x_n,x'_n)+\rho(y_n,y'_n).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n,y'_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

Функция $\rho(x^*,y^*)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики. Действительно, $\rho(x^*,y^*)\geqslant 0$ и $\rho(x^*,y^*)=\rho(y^*,x^*)$ для любых x^* и y^*

из M^*. Далее, если $\rho(x^*, y^*) = 0$, то x^* и y^* совпадают, так как в этом случае, если $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, то $\{x_n\} \sim \{y_n\}$. Наконец, если $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$, то из неравенства

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$$

в пределе при $n \to \infty$ получаем

$$\rho(x^*, y^*) \leqslant \rho(x^*, z^*) + \rho(z^*, y^*).$$

Итак, построено метрическое пространство $\{M^*; \rho^*\}$, элементами которого являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей элементов из M.

Покажем, что пространство $\{M^*; \rho^*\}$ содержит подпространство, которое изометрично пространству $\{M; \rho\}$.

Каждому элементу $x \in M$ поставим в соответствие элемент $x^* \in M^*$, содержащий стационарную последовательность $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, это соответствие определяет взаимно однозначное отображение M на некоторое подмножество M' множества M^*. Более того, это отображение является изометричным, так как если x^* и y^* из M', то существуют x и y из M такие, что $\{x\} \in x^*$, $\{y\} \in y^*$, и поэтому $\rho^*(x^*, y^*) = \rho(x, y)$. Докажем, что множество M' плотно в M^*, т.е. что любая точка $x^* \in M^*$ является пределом последовательности из M'.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$. Через x_k^* обозначим элемент из M', соответствующий элементу $x_k \in M$. Тогда, согласно определению,

$$\rho^*(x^*, x_k^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_k).$$

А так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n, k \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_n, x_k) < \frac{\varepsilon}{2},$$

и поэтому

$$\forall k \geqslant N_\varepsilon \quad \rho^*(x^*, x_k^*) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho^*(x^*, x_k^*) = 0$.

Для завершения доказательства осталось показать, что метрическое пространство $\{M^*; \rho^*\}$ полное.

Пусть $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность точек из M^*. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $y_n \in M$ такое, что

$$\rho^*(x_n^*; y_n^*) < \frac{1}{n},$$

где y_n^* — элемент из M', соответствующий элементу $y_n \in M$.

Последовательность $\{y_n^*\}$ фундаментальная. Действительно, это следует из неравенства

$$\rho^*(y_n^*, y_m^*) \leqslant \rho^*(y_n^*, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, y_m^*) < \\ < \frac{1}{n} + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m} \quad (1)$$

и фундаментальности последовательности $\{x_n^*\}$. А так как $\rho^*(y_n^*, y_m^*) = \rho(y_n, y_m)$, то фундаментальной будет и последовательность $\{y_n\}$. Через y^* обозначим класс эквивалентных фундаментальных последовательностей, содержащий последовательность $\{y_n\}$. Тогда

$$\rho^*(y^*, x_n^*) \leqslant \rho^*(y^*, y_n^*) + \rho^*(y_n^*, x_n^*) < \\ < \rho^*(y^*, y_n^*) + \frac{1}{n} = \lim_{k\to\infty} \rho(y_k, y_n) + \frac{1}{n}.$$

А так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall k, n \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_k, y_n) + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

то

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \rho^*(y^*, x_n^*) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^*(y^*, x_n^*) = 0$. Теорема доказана.

В пункте 1.2 было доказано, что пространство $CL_1([a;b])$ является неполным. Пополнение этого пространства обозначается $L_1([a;b])$ и называется *пространством абсолютно интегрируемых на отрезке* $[a;b]$ *функций.*

1.4. Компакты. Как и для множеств точек пространства $\mathbb{R}^n$, произвольная совокупность множеств X_α, $\alpha \in A$, точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ называется *покрытием множества* $X \subset M$, если $X \subset \bigcup_\alpha X_\alpha$. Покрытие называется *открытым*, если все его множества открытые.

Определение 1. Множество X точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ называется *компактным* (или *компактом*), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное число множеств, которые тоже покрывают множество X.

Известно, что множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}^n$ (см. § 3 гл. 6). Как увидим в дальнейшем, в общем случае для метрических пространств это утверждение является неверным. Вместо ограниченности нужна так называемая *вполне ограниченность множества.* Для множеств из $\mathbb{R}^n$ эти понятия совпадают.

Определение 2. Пусть X — некоторое множество точек метрического пространства $\{M; \rho\}$. Множество $B \subset M$ называется *ε-сетью для множества X*, если

$$\forall x \in X \quad \exists a \in B: \quad \rho(x, a) \in \varepsilon.$$

Определение 3. Множество X точек метрического пространства $\{M; \rho\}$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в M для него существует конечная ε-сеть.

Ясно, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным. Однако существуют ограниченные множества, которые не являются вполне ограниченными. Например, множество последовательностей

$$e_1 = (1, 0, \dots), \; e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots, \; e_n = (0, \dots, 0, 1, \dots), \dots$$

(здесь у e_n n-й член равен 1, а все другие равны нулю), в пространстве ограниченных последовательностей (см. пример 2 из п. 1.2) является ограниченным, но, очевидно, для него не существует конечной ε-сети, например, с $\varepsilon = 0,5$.

Заметим, что в определениях 1 и 3 возможен случай, когда $X = M$. Оказывается, не ограничивая общности, можно рассматривать только этот случай. В связи с этим вводят следующие определения.

Метрическое пространство $\{M; \rho\}$ называется *компактным*, если множество M компактно. Аналогично, метрическое пространство $\{M; \rho\}$ называется *вполне ограниченным*, если множество M вполне ограничено.

Лемма. *Множество X точек метрического пространства $\{M; \rho\}$ компактно (вполне ограничено) тогда и только тогда, когда компактно (соответственно вполне ограничено) метрическое пространство $\{X; \rho\}$.*

Доказательство. Пусть множество $X \subset M$ компактно. Докажем, что пространство $\{X; \rho\}$ тоже компактно.

Пусть открытые в пространстве $\{X; \rho\}$ множества X_α, $\alpha \in A$, покрывают множество X. Вообще говоря, эти множества могут не быть открытыми в пространстве $\{M; \rho\}$, однако их δ-окрестности в этом пространстве будут открытыми. В силу компактности множеств $X \subset M$ существует конечное число множеств X_α, δ-окрестности которых покрывают множество X. Эти множества покрывают множество X в пространстве $\{X; \rho\}$.

Пусть теперь пространство $\{X; \rho\}$ компактное. Докажем, что множество $X \subset M$ компактно в пространстве $\{M; \rho\}$.

Пусть открытые в пространстве $\{M; \rho\}$ множества $G_\alpha \subset M$, $\alpha \in A$, покрывают множество X. Очевидно, множества

$$X_\alpha = G_\alpha \cap X, \quad \alpha \in A,$$

являются открытыми в пространстве $\{X;\rho\}$ и покрывают множество X. В силу компактности пространства $\{X;\rho\}$ существует конечное число множеств G_α, пересечения которых с X покрывают множество X. Эти множества покрывают множество X.

Первое утверждение доказано. Второе утверждение почти очевидное. Докажите его в качестве упражнения.

В силу этой леммы в дальнейшем для простоты все утверждения о компактных множествах будем формулировать и доказывать для компактных пространств.

Теорема 1. *Если метрическое пространство компактное, то оно полное и вполне ограниченное.*

Доказательство. Сначала докажем, что если метрическое пространство M компактное, то оно полное. Доказывать будем методом от противного.

Предположим, что некоторое компактное метрическое пространство M является неполным, и через M^* обозначим его пополнение. Тогда в M^* существует точка x^*, которая не принадлежит множеству M. Как обычно, через $O_{1/n}(x^*)$ обозначим открытый шар радиуса $1/n$ с центром в точке x^*, а через $\overline{O}_{1/n}(x^*)$ — его замыкание. Семейство открытых множеств $G_n = M\backslash\overline{O}_{1/n}(x^*)$, $n\in\mathbb{N}$, покрывает множество M. Однако никакая конечная совокупность этих множеств его не покрывает, так как любой шар $O_{1/n}(x^*)$ содержит хотя бы одну точку множества M. Следовательно, наше предположение неверное.

Докажем теперь, что если метрическое пространство M компактное, то оно вполне ограниченное.

Каждую точку $x\in M$ покроем шаром $O_\varepsilon(x)$ радиуса $\varepsilon>0$. Из компактности M следует существование конечного числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ таких, что шары $O_\varepsilon(x_j)$, $j=1,2,\ldots,N$, покрывают множество M. Очевидно, что эти точки образуют конечную ε-сеть для множества M. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если метрическое пространство полное и вполне ограниченное, то оно компактное.*

Доказательство. Пусть метрическое пространство M полное и вполне ограниченное. Предположим, что оно не является компактным, т.е. существует семейство открытых множеств X_α, $\alpha\in A$, которое покрывает множество M, но никакая конечная совокупность этих множеств не покрывает это множество.

В силу того, что множество M вполне ограничено, для любого $\varepsilon>0$ существует конечное число точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ таких, что шары $O_\varepsilon(x_j)$, $j=1,2,\ldots,N$, покрывают множество M. Из нашего предположения следует, что одно из множеств $\overline{O}_1(x_j)$ не покрывается никакой конечной совокупностью множеств X_α. Обо-

значим это множество через F_1. Оно вполне ограниченное, поэтому для $\varepsilon = 1/2$ существует конечное число точек таких, что шары радиуса $1/2$ с центрами в этих точках покрывают F_1. Через F_2 обозначим ту часть множества F_1, которая лежит в круге радиуса $1/2$ и не покрывается никакой конечной совокупностью множеств X_α. Поступая так и далее, по индукции построим последовательность замкнутых множеств F_n, $n \in \mathbb{N}$, таких, что

$$F_{n+1} \subset F_n, \quad d(F_n) \leqslant \frac{2}{n},$$

причем любое из них не покрывается никакой конечной совокупностью множеств X_α.

С другой стороны, в силу полноты пространства M множества F_n, $n \in \mathbb{N}$, имеют одну общую точку $x_0 \in M$. Точка x_0 накрывается некоторым открытым множеством X_{α_0}, причем это множество покрывает некоторый шар $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$. Если $\dfrac{2}{n} < \delta$, то $F_n \subset O_\delta(x_0)$. Следовательно, если $\dfrac{2}{n} < \delta$, то $F_n \subset X_{\alpha_0}$, что противоречит нашему предположению. Теорема 2 доказана.

Таким образом, имеет место следующий *критерий компактности метрических пространств:*

Для того чтобы метрическое пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и вполне ограниченным.

Докажем еще один критерий компактности метрических пространств.

Теорема 3. *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Докажем сначала следующее утверждение:

Если метрическое пространство $\{M; \rho\}$ компактное, то любая последовательность $\{x_n\}$ его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

Предположим, что есть последовательность $\{x_n\}$, которая не имеет сходящейся подпоследовательности. Следовательно, ни одна точка $x \in M$ не является ее частичным пределом, и поэтому у каждой точки x есть окрестность $O(x)$, которая содержит лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Эти окрестности образуют покрытие множества M, причем, согласно построению, никакая конечная совокупность не покрывает последовательность $\{x_n\}$, что противоречит компактности множества M.

Наше утверждение доказано. Докажем теперь обратное утверждение:

27 Зак. 193

Если любая последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства $\{M; \rho\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, то это пространство компактное.

Во-первых, это пространство полное. Действительно, любая фундаментальная последовательность имеет предел, так как у нее есть сходящаяся подпоследовательность. Докажем, что пространство $\{M; \rho\}$ вполне ограниченное. Доказывать будем методом от противного.

Пусть множество M не является вполне ограниченным, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для M не существует конечной ε-сети. Тогда, очевидно, множество M содержит бесконечное число точек. Построим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом.

Выберем некоторую точку $x_1 \in M$. По предположению, она не образует ε-сети для M, поэтому существует точка $x_2 \in M$ такая, что $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Точки x_1, x_2 тоже не образуют ε-сети для X, и поэтому существует точка x_3 такая, что $\rho(x_3, x_j) \geqslant \varepsilon$, $j = 1, 2$. Точки x_1, x_2, x_3 выбраны так, что для любого $i \neq j$, где $i, j = 1, 2, 3$, справедливо неравенство

$$\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Пусть в множестве X выбраны точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, что для любых $i \neq j$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, справедливо неравенство (1). Так как эти точки не образуют ε-сети для X, то существует точка $x_{n+1} \in X$ такая, что $\rho(x_{n+1}, x_i) \geqslant \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, по индукции, строится последовательность $\{x_n\}$, для которой справедливо условие: $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon \quad \forall i \neq j$. Очевидно, эта последовательность не является фундаментальной. Теорема 3 доказана.

В учебной и научной литературе компактные множества (в нашем определении) иногда называют *бикомпактами*, а *компактами* называют множества, у которых любая последовательность их точек содержит сходящуюся подпоследовательность. Теорема 3 утверждает, что для метрических пространств эти понятия совпадают.

Множество метрического пространства будем называть *предкомпактом*, если его замыкание компактно. Из критерия компактности следует, что *множество точек полного метрического пространства предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

В учебной и научной литературе предкомпактные множества иногда называются компактными, а компактные — бикомпактными.

1.5. Критерий Арцела компактности множеств в пространстве непрерывных функций. В этом пункте укажем необходимые и достаточные условия предкомпактности семейства функций в пространстве непрерывных функций $C[a; b]$, но прежде сформулируем несколько определений.

Определение 1. Семейство S функций f, определенных и непрерывных на отрезке $[a;b]$, называется *равномерно ограниченным*, если

$$\exists c: \quad \forall f \in S \quad \max_{x\in[a;b]} |f(x)| \leqslant c. \tag{1}$$

Определение 2. Семейство S функций f, определенных и непрерывных на отрезке $[a;b]$, называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall f \in S,\ \forall x, x' \in [a;b]:$$

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{2}$$

Теорема. *Семейство S функций f, определенных и непрерывных на отрезке $[a;b]$, предкомпактно в пространстве $C[a;b]$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть семейство S предкомпактно. Согласно определению, это означает, что $\overline{S}$ компактно. Поэтому множество $\overline{S}$, а следовательно, и множество S в пространстве $C[a;b]$ не только ограничено, но и вполне ограничено.

Ограниченность семейства S в пространстве $C[a;b]$ означает, что это семейство функций равномерно ограничено на отрезке $[a;b]$.

Вполне ограниченность семейства S в пространстве $C[a;b]$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ в $C[a;b]$ для S существует конечная ε-сеть.

Пусть для выбранного $\varepsilon > 0$ ε-сеть состоит из функций

$$f_1(x), \ldots, f_N(x).$$

Каждая функция $f_j(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$. Поэтому

$$\exists \delta > 0: \quad \forall j,\ \forall x_1, x_2 \in [a;b]:$$

$$|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f_j(x_2) - f_j(x_1)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь $f \in S$. В силу определения ε-сети

$$\exists j: \quad \max_x |f(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому если $|x_1 - x_2| < \delta$, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f_j(x_1)| + \\ + |f_j(x_1) - f_j(x_2)| + |f_j(x_2) - f(x_2)| < 3\varepsilon.$$

И так как это выполняется для любой $f \in S$, то мы доказали, что семейство S равностепенно непрерывно.

Докажем обратное утверждение: если семейство S равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то оно предкомпактно. А так как пространство $C[a;b]$ полное, то достаточно доказать, что семейство S вполне ограничено в пространстве функций, определенных и ограниченных на отрезке $[a;b]$.

Итак, пусть семейство S функций $f \in C[a;b]$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Для этого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[a;b]$ выберем точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad x_i - x_{i-1} < \delta \quad \forall i,$$

а на отрезке $[-c;c]$ — точки $y_0, y_1, \ldots, y_m$ так, чтобы

$$-c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = c, \quad y_j - y_{j-1} < \varepsilon \quad \forall j.$$

Через A обозначим множество всех непрерывных на $[a;b]$ функций, графиками которых являются ломаные с вершинами в точках (x_i, y_i). Очевидно, множество A состоит из конечного числа функций.

Выберем теперь некоторую функцию $f \in S$. Для каждого x_i через (x_i, y_{j_i}) обозначим точку вида (x_i, y_j), ближайшую к точке $(x_i, f(x_i))$. Очевидно,

$$|f(x_i) - y_{j_i}| < \varepsilon.$$

Через φ обозначим непрерывную функцию, графиком которой является ломаная с вершинами в точках

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_{j_1}),\ \ldots,\ (x_n, y_{j_n}).$$

Очевидно, для любого i имеем:

$$|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \leqslant |\varphi(x_i) - f(x_i)| + \\ + |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})| < 3\varepsilon.$$

Кроме того, для любого $x \in [x_{i-1}; x_i]$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_{i-1})| \leqslant |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| < 3\varepsilon.$$

Для оценки $\rho(f, \varphi)$ в пространстве $C[a;b]$ заметим, что каждая точка $x \in [a;b]$ содержится в некотором отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, и поэтому

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})| + \\ + |\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x)| < \varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon = 5\varepsilon.$$

Следовательно, $\rho(f, \varphi) < 5\varepsilon$.

Так как здесь ε может быть любым положительным числом, то тем самым доказано, что множество S вполне ограничено. Теорема доказана.

Эта теорема называется *критерием Арцела компактности семейства непрерывных функций*.

§ 2. Отображения метрических пространств

2.1. Непрерывные отображения. Пусть заданы два метрических пространства $\{X;\rho_X\}$, $\{Y;\rho_Y\}$ и некоторое множество $G \subset X$. Тогда если задано правило f, по которому каждой точке $x \in G$ ставится в соответствие некоторая точка $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества G метрического пространства X в метрическое пространство Y.

Так как множество $G \subset X$ с метрикой ρ_X является метрическим пространством, то, не ограничивая общности, можно считать, что $G = X$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать отображения метрических пространств.

Как обычно, если задано отображение $f : X \to Y$, то точка $y \in Y$, которая ставится в соответствие точке $x \in X$, называется *образом точки x при отображении f* и обозначается $f(x)$, а любая точка $x \in X$, которой в соответствие ставится точка $y \in Y$, называется *прообразом точки y*. Множество всех прообразов точки $y \in Y$ называется *полным прообразом точки y* и обозначается $f^{-1}(y)$.

Для любого множества $A \subset X$ множество всех $y = f(x)$, $x \in A$, называется *образом множества A* и обозначается $f(A)$.

Для любого множества $B \subset Y$ множество всех $x \in X$ таких, что $f(x) \subset B$, называется *полным прообразом* (или просто *прообразом*) *множества B* и обозначается $f^{-1}(B)$.

Определение 1. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке $x_0 \in X$*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in O_\delta(x_0) \quad f(x) \in O_\varepsilon(y_0), \tag{1}$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Условие (1) можно записать в равносильной форме, используя вместо ε-δ-окрестностей произвольные окрестности.

Напомним, что любое открытое множество, содержащее точку x_0, называется *окрестностью точки x_0* и обозначается $O(x_0)$. Легко видеть, что условие (1) равносильно условию:

$$\forall O(y_0) \quad \exists O(x_0) : \quad f(O(x_0)) \subset O(y_0). \tag{2}$$

Как и для числовых функций, определение непрерывности отображения можно сформулировать с помощью последовательностей.

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке $x_0 \in X$*, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из X, сходящейся к x_0, последовательность точек $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $y_0 = f(x_0)$.

Доказательство эквивалентности определений 1 и 2 аналогично случаю числовых функций.

В качестве упражнения предлагается доказать *теорему о непрерывности композиции непрерывных отображений.*

Теорема 1. *Если отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, а отображение $g : Y \to Z$ непрерывно в точке $y_0 = f(x_0)$, то их композиция, заданная формулой $z = g(f(x))$, непрерывна в точке x_0.*

Определение 3. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным отображением пространства X в пространство Y*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Теорема 2. *Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно, и пусть G — некоторое открытое множество точек пространства Y. Тогда если $x_0 \in f^{-1}(G)$, то G является окрестностью точки $y_0 = f(x_0)$. Согласно определению непрерывности (см. (2)), существует $O(x_0)$ такая, что $f(O(x_0)) \subset G$, и, следовательно, $O(x_0) \subset f^{-1}(G)$. Таким образом, каждая точка множества $f^{-1}(G)$ содержится в нем с некоторой своей окрестностью, т.е. множество $f^{-1}(G)$ открытое.

Пусть теперь отображение F такое, что если G открытое, то $f^{-1}(G)$ тоже открытое. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ выполняется условие: для любой окрестности $O(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ множество $U = f^{-1}(O(y_0))$ открытое, а так как $x_0 \in U$, то U — окрестность точки x_0. Таким образом, для любой окрестности $O(y_0)$ точки y_0 существует окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) = O(y_0)$. А это и означает, что f непрерывно в точке x_0. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества является замкнутым множеством.*

Это утверждение является очевидным следствием теоремы 2, так как открытые и замкнутые множества являются взаимно дополнительными, и, кроме того, прообраз дополнения является дополнением прообраза.

2.2. Непрерывные отображения компактов. Пусть, как и в предыдущем пункте, заданы два метрических пространства $\{X; \rho_X\}$ и $\{Y; \rho_Y\}$ и некоторое отображение f пространства X в пространство Y.

Теорема 1. *Пусть отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно. Тогда если пространство X компактное, то множество $f(X)$ тоже компактное.*

Доказательство. Пусть Y_α, $\alpha \in A$, — некоторое открытое покрытие множества $f(X)$ в пространстве Y. Из теоремы 2 предыдущего пункта следует, что множества $X_\alpha = f^{-1}(Y_\alpha)$, покрывающие X, открытые. Так как X компактное, то существует конечная совокупность этих множеств, которая покрывает X. Тогда образы множеств этого конечного покрытия покрывают множество $f(X)$. Теорема 1 доказана.

Эту теорему коротко формулируют так: *непрерывный образ компакта есть компакт.*

Это утверждение является обобщением теоремы из пункта 4.2 главы 6, доказанной для непрерывных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Определение 1. Отображение f метрического пространства $\{X; \rho_X\}$ в метрическое пространство $\{Y; \rho_Y\}$ называется *равномерно непрерывным*, если выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x, x' \in X:$$

$$\rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.*

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 4 из пункта 4.5 главы 6.

Определение 2. Отображение одного метрического пространства на другое называется *гомеоморфизмом* этих пространств, если оно непрерывно, взаимно однозначно, и обратное отображение тоже непрерывно.

Теорема 3. *Пусть отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно и взаимно однозначно. Тогда если пространство X компактное, то обратное отображение непрерывно.*

Доказательство. Так как компактное множество всегда замкнуто, а замкнутое множество компакта компактно, то из теоремы 1 следует, что при непрерывном отображении компакта образ любого замкнутого множества замкнут. Таким образом, для любого замкнутого множества $F \subset X$ множество $f(F)$ замкнуто. Для обратного отображения f^{-1} множество $f(F)$ является прообразом множества F. Следовательно, при отображении f^{-1} прообраз каждого замкнутого множества F является замкнутым, и поэтому (см. следствие из п.2.1) отображение f^{-1} непрерывно. Теорема 3 доказана.

Определение 3. Отображение f метрического пространства X в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называется *функционалом.*

Теорема 4. *Если функционал f определен и непрерывен на компактном метрическом пространстве X, то он на X ограничен и принимает наименьшее и наибольшее значения.*

Действительно, образом компакта X является компакт $f(X) \subset \subset \mathbb{R}$. Он является ограниченным и замкнутым и, в частности, содержит наибольшее и наименьшее значения.

2.3. Непрерывные отображения связных множеств. Напомним, что для множеств точек пространства $\mathbb{R}^n$ уже было введено понятие связности. Именно, множество X называется *несвязным*, если существуют два непересекающихся открытых множества G_1 и G_2, каждое из которых пересекается с множеством X и объединение которых содержит X. В противном случае множество X называется *связным*. Так же определяются связные и несвязные множества точек любого метрического пространства $\{M; \rho\}$. В частности, метрическое пространство $\{M; \rho\}$ называется *связным*, если множество M связно.

Заметим, что в метрическом пространстве $\{M; \rho\}$ множество M всегда открытое и замкнутое. Поэтому если множества G_1 и G_2 открытые, то множества $M_1 = G_1 \cap M$, $M_2 = G_2 \cap M$ тоже открытые.

Это замечание позволяет для метрических пространств следующим образом определить понятие связности.

Определение. Метрическое пространство $\{M; \rho\}$ называется *связным*, если множество M нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств M_1 и M_2.

Теорема 1. *Пусть отображение f метрического пространства X на метрическое пространство Y непрерывно. Тогда если пространство X связно, то пространство Y тоже связно.*

Доказательство. Будем доказывать методом от противного. Пусть пространство Y не является связным. Тогда множество Y можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств Y_1 и Y_2. При непрерывном отображении f их прообразы X_1 и X_2 непустые, открытые и непересекающиеся, причем $X = X_1 \cup X_2$. Однако это противоречит тому, что множество X связное. Теорема доказана.

Коротко ее формулируют так:

Непрерывный образ связного множества является связным множеством.

Легко видеть, что это утверждение является обобщением теоремы Коши о промежуточных значениях для числовых функций. Обобщением утверждения о том, что непрерывная числовая функция отрезок отображает в отрезок, является следующая теорема.

Теорема 2. *Непрерывный образ связного компакта есть связный компакт.*

Это утверждение следует из предыдущей теоремы и теоремы 1 предыдущего пункта.

Непустой связный компакт иногда называют *континуумом*. Тогда теорему 2 формулируют следующим образом:

Непрерывный образ континуума есть континуум.

2.4. Сжимающие отображения и неподвижные точки. Смысл понятий "сжимающее отображение" и "неподвижная точка" по существу содержится в самих их названиях.

Определение 1. Отображение метрического пространства $\{X; \rho\}$ в себя называется *сжимающим*, если

$$\exists q \in (0;1): \quad \forall x, y \in X \quad \rho(f(x), f(y)) \leqslant q\rho(x,y). \tag{1}$$

Из условия (1) видно, что сжимающее отображение $f: X \to X$ непрерывно, и, более того, оно равномерно непрерывно на X.

Определение 2. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой отображения* $f: X \to X$, если $f(x) = x$.

Теорема 1. *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть отображение $f: X \to X$ удовлетворяет условию (1). Выберем некоторую точку $x_0 \in X$ и по рекуррентной формуле

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

построим последовательность $\{x_n\}$. Она является фундаментальной. Действительно,

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant q\rho(x_n, x_{n-1})$$

и, следовательно,

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant q^n \rho(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots +$$
$$+\rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant (q^n + q^{n+1} + \dots + q^{n+p-1})\rho(x_1, x_0).$$

Отсюда по формуле для суммы геометрической прогрессии следует, что

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1) \tag{3}$$

для любого n и любого p, что и доказывает, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. А так как пространство X полное, то существует точка $a \in X$, к которой эта последовательность сходится. Тогда из равенства (2) в пределе при $n \to \infty$ следует, что $a = f(a)$, т.е. точка $a \in X$ является неподвижной точкой отображения f. Докажем, что эта неподвижная точка единственная.

Пусть существует точка $b \in X$ такая, что $f(b) = b$. Тогда

$$\rho(a; b) = \rho(f(a), f(b)) \leqslant q\rho(a; b),$$

а так как $q < 1$, то $\rho(a; b) = 0$, и, следовательно, $a = b$. Теорема доказана.

Эта теорема называется *принципом сжимающих отображений*. Сделаем несколько замечаний к этой теореме.

Построение последовательности $\{x_n\}$ с помощью рекуррентной формулы (2) и исследование ее сходимости обычно называют *методом последовательных приближений*.

Из доказанной теоремы следует, что если метрическое пространство X полное, а отображение $f : X \to X$ сжимающее, то уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение, которое является пределом *последовательных приближений* (2) при любом *начальном приближении* x_0.

Из неравенства (3) в пределе при $p \to \infty$ получаем неравенство

$$\rho(x_n, a) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, f(x_0)),$$

которое дает оценку близости *приближения* x_n к решению a в метрике рассматриваемого пространства.

Принцип сжимающих отображений позволяет единым методом доказывать теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных, интегральных и других уравнений. С его помощью можно не только доказывать существование и единственность решения уравнения $f(x) = x$, но и находить его с любой степенью точности относительно рассматриваемой метрики.

Принцип сжимающих отображений является простейшим из так называемых *принципов неподвижной точки*.

В качестве простейшего примера применения принципа сжимающих отображений рассмотрим решение систем линейных алгебраических уравнений методом итераций.

Пусть M_n — метрическое пространство, точками которого являются точки арифметического n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, а метрика введена по формуле

$$\rho(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|,$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Легко доказать, что так определенное метрическое пространство M_n полное. Рассмотрим отображение f пространства M_n в себя, заданное равенством

$$f(x) = Ax + b, \tag{4}$$

где A — квадратная матрица порядка n, а $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Пусть $A = (a_{ij})$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$. Тогда

$$\rho(f(x), f(x')) = \rho(Ax, Ax') = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j - \xi'_j) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \max_j |\xi_j - \xi'_j| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \rho(x, x').$$

Отсюда следует, что если выполняется условие

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \tag{5}$$

то отображение (4) будет сжимающим.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если матрица A удовлетворяет условию (5), то уравнение $x - Ax = b$ имеет единственное решение при любом b. Это решение можно получить методом последовательных приближений при любом выборе начального приближения.*

Заметим, что если точка x_0 является неподвижной для отображения f, то она будет неподвижной и для n-й степени этого отображения. Для сжимающего отображения справедливо обратное утверждение.

Теорема 3. *Если некоторая степень отображения полного метрического пространства в себя является сжимающим отображением, то само отображение имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to X$ такое, что его n-я степень, т.е. отображение $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$, $n \geqslant 1$, является сжимающим. Согласно теореме 1, у отображения f^n существует неподвижная точка, т.е. $\exists a \in X : \quad f^n(a) = a$. Тогда $f(a) = f(f^n(a)) = f^n(f(a))$, т.е. точка $f(a)$ тоже неподвижная для f^n. А так как сжимающее отображение f^n может иметь только одну неподвижную точку, то $f(a) = a$.

Существование неподвижной точки у отображения f доказано. Единственность следует из того, что неподвижная точка для f будет неподвижной и для f^n. Теорема 3 доказана.

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t, \tau) x(\tau)\, d\tau + f(t),$$

где λ — некоторое число, функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, функция $K(t,\tau)$ непрерывна на квадрате $\Delta = [a;b] \times [a;b]$, а $x(t)$ — искомая функция.

Очевидно, оператор

$$A(x) = \lambda \int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + f(t)$$

действует из $C[a;b]$ в $C[a;b]$. Для него имеем:

$$|A(x)(t) - A(y)(t)| = \left|\lambda \int_a^t K(t,\tau)(x(\tau) - y(\tau))\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| \cdot q \cdot \rho(x,y) \cdot (t-a),$$

где $q = \max|K(t,\tau)|$, $(t,\tau) \in \Delta$. Далее,

$$|A^2(x)(t) - A^2(y)(t)| \leqslant |\lambda|^2 \cdot q^2 \cdot \rho(x,y)\frac{(t-a)^2}{2},$$

и для n-й степени оператора A имеем:

$$|A^n(x)(t) - A^n(y)(t)| \leqslant |\lambda|^n \cdot q^n \cdot \rho(x,y)\frac{(t-a)^n}{n!}.$$

Очевидно, для любых λ и q существует n такое, что

$$\frac{\lambda^n q^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Для этого n отображение A^n будет сжимающим.

Из теоремы 3 следует, что *уравнение Вольтерра при любом λ имеет и притом единственное непрерывное решение.*

§ 3. Линейные, нормированные и банаховы пространства

3.1. Линейные пространства. Линейные (или векторные) пространства над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел и над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел определялись в линейной алгебре. Там же были определены и такие понятия, как подпространство линейного пространства, линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, линейное отображение, изоморфизм линейных пространств и т.д. Для полноты изложения приведем некоторые из этих определений.

Определение 1. *Линейным* или *векторным пространством над полем действительных* (*комплексных*) *чисел* называется множество L элементов $x, y, z, \ldots$ произвольной природы, для которых определены операции *сложения двух элементов* и *умножения элементов на действительные* (*комплексные*) *числа*, т.е.

1. каждой паре x, y элементов из L поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется *суммой элементов* x, y и обозначается $x + y$;
2. каждому элементу x из L и каждому действительному (комплексному) числу α поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется *произведением элемента x на число α* и обозначается αx;

причем эти операции удовлетворяют следующим двум группам условий:

I. 1. $x + y = y + x$ (*коммутативность сложения*);

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*ассоциативность сложения*);

3. существует элемент, называемый *нулевым* и обозначаемый 0, такой, что $x + 0 = x \quad \forall x \in L$;

4. $\forall x \in L \quad \exists y \in L: \quad x + y = 0$;

II. 5. $1x = x \quad \forall x \in L$;

6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (*ассоциативность умножения*);

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (*дистрибутивность относительно числового множителя*);

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (*дистрибутивность относительно элементов пространства*);

Для данного элемента $x \in L$ элемент $y \in L$, удовлетворяющий условию $x + y = 0$, называется *противоположным элементу x* и обозначается $-x$. Таким образом, по определению

$$x + (-x) = 0.$$

Элемент $x + (-y)$ называется *разностью элементов* x, y и обозначается $x - y$.

Элементы линейного пространства обычно называют *векторами*, а операции сложения векторов и умножения вектора на число — *линейными операциями*.

Определение 2. Линейное пространство L' называется *подпространством линейного пространства* L, если $L' \subset L$ и операции сложения векторов и умножения вектора на число в L' определены так же, как и L.

Из этого определения следует, что операции сложения элементов и умножения элемента на число, определенные в L, *замкнуты в* L', т.е. если x, y из L', то $x + y$ тоже из L', и $\alpha x \in L'$ для любого числа α.

Линейной комбинацией векторов $x_1, \dots, x_n$ называется любой вектор вида

$$\alpha_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \tag{1}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — числовые множители.

Линейная комбинация (1) называется *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ отличен от нуля.

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация (1), равная нулю. Если же только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулю, то векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно независимыми*.

Определение 3. Произвольная система векторов линейного пространства называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 4. Линейное пространство называется *n-мерным*, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ в нем существуют n линейно независимых векторов.

Заметим, что в линейной алгебре изучаются в основном только конечномерные пространства. Бесконечномерные пространства являются предметом изучения математического или функционального анализа.

Напомним еще некоторые понятия, относящиеся к линейным пространствам.

Определение 5. Пусть задана некоторая система элементов линейного пространства L. Совокупность всех линейных комбинаций этой системы называется ее *линейной оболочкой*.

Очевидно, линейная оболочка любой системы элементов линейного пространства L является подпространством этого пространства.

Определение 6. Отображение f линейного пространства X в линейное пространство Y называется *линейным отображением* (или *линейным оператором*), если для любых векторов x, y из X и любых чисел α, β

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Множество всех линейных операторов, отображающих X в Y, обозначается $L(X; Y)$. Легко видеть, что при обычном определении сложения двух операторов и умножения оператора на число, это множество является линейным пространством.

Определение 7. Любое линейное взаимно однозначное отображение линейного пространства X на линейное пространство Y называется *изоморфизмом* этих пространств. В этом случае пространства X, Y называются *изоморфными*.

Изоморфные пространства могут отличаться лишь природой своих элементов, а не своими свойствами. Поэтому при изучении свойств линейных пространств изоморфные пространства не различаются.

3.2. Линейные нормированные пространства. В линейном нормированном пространстве, как следует из самого названия, кроме понятий линейного пространства, имеются еще понятия, связанные с длиной (нормой) элементов этого пространства.

Определение 1. Линейное пространство X (над полем действительных или комплексных чисел) называется *нормированным*, если на X определена функция $\|x\| : x \to \mathbb{R}$ такая, что

1. $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall x \in X$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (или $\alpha \in \mathbb{C}$);
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$;
4. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

Эта функция называется *нормой* в пространстве X, а число $\|x\|$ — *нормой элемента* или *вектора* x. Свойства 1–4 называются *аксиомами нормы*. В частности, свойство 2 называется *однородностью* нормы, а свойство 3 — *неравенством треугольника*.

Примерами линейных нормированных пространств являются линейное пространство $\mathbb{R}^n$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1}$$

и линейное пространство $\mathbb{C}^n$ векторов $z = (z_1, \ldots, z_n)$ с нормой

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}.$$

Первое — над полем действительных чисел, а второе — над полем комплексных чисел.

Очевидно, в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$ (соответственно и в $\mathbb{R}^n$) нормой будет и функция

$$\|z\| = \sup_j |z_j|. \tag{2}$$

Другим важным примером линейного пространства является пространство $C[a;b]$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций f с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in [a;b]} |f(x)|. \tag{3}$$

Очевидно, в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций f функция

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{4}$$

тоже удовлетворяет все аксиомам нормы. Однако в линейном пространстве интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций функция (4) не будет нормой: она не удовлетворяет аксиоме 4. Первое пространство будем обозначать $CL_1[a;b]$, а второе — $RL_1[a;b]$.

Определение 2. Функция $\|x\|:X\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая аксиомам 1, 2, 3 нормы, но не удовлетворяющая аксиоме 4, называется *полунормой*. Линейное пространство с полунормой называется *полунормированным*.

Функция (4) в линейном пространстве интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций является полунормой. Однако если функции f и g, для которых $\|f-g\|_1=0$, считать равными, то функция (4) будет нормой в $RL_1[a;b]$.

Аналогично, в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых функций f на отрезке $[a;b]$ функция

$$\|f\| = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)| \tag{5}$$

является полунормой. Однако если функции f и g, которые отличаются на аддитивную постоянную, считать равными, то функция (5) будет нормой.

В дальнейшем будем рассматривать только нормированные пространства, считая, что два элемента равны, если норма их разности равна нулю.

Легко проверить, что функция

$$\rho(x,y)=\|x-y\|,\quad x,y\in X,$$

удовлетворяет всем аксиомам метрики. Следовательно, линейное нормированное пространство является метрическим, и поэтому в нем определены все понятия метрического пространства.

Например, множество E элементов нормированного пространства X называется *ограниченным*, если

$$\exists M>0:\quad \forall x\in E\quad \|x\|\leqslant M.$$

Последовательность $\{x_n\}$ точек нормированного пространства X называется *сходящейся к точке* x_0, если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N:\quad \forall n\geqslant N\quad \|x_n-x_0\|<\varepsilon.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N:\forall n,m\geqslant N\quad \|x_n-x_m\|<\varepsilon.$$

Нормированное пространство X называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел в этом пространстве.

Определение 3. Полное нормированное пространство называется *банаховым.*

Важным примером банахова пространства является пространство $C[a;b]$.

Определение 4. Линейные нормированные пространства X_1 и X_2 называются *изоморфными*, если существует изоморфизм f линейных пространств X_1 и X_2 такой, что $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$.

Изоморфизм линейных пространств X_1, X_2, сохраняющий норму, называется *изоморфизмом линейных нормированных пространств* X_1, X_2.

Изоморфные нормированные пространства могут отличаться только природой своих элементов, а не свойствами самих пространств. Поэтому при изучении свойств нормированных пространств изоморфные пространства не различаются.

Определение 5. В линейном пространстве X две нормы $\|x\|$ и $\|x\|_*$ называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, что

$$c_1\|x\| \leqslant \|x\|_* \leqslant c_2\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Легко видеть, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ нормы (1) и (2) эквивалентны. Действительно,

$$\sup_j |x_j| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leqslant \sqrt{n} \sup_j |x_j|.$$

Вообще, для конечномерных пространств справедливо следующее утверждение.

Теорема. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X — n-мерное линейное пространство над полем действительных чисел, и пусть $\|x\|$ — некоторая норма в пространстве X. Выберем в X какой-то базис $e_1, \dots, e_n$ и покажем, что норма $\|x\|$ эквивалентна норме

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

где $x_1, \dots, x_n$ — координаты вектора x по выбранному базису.

Прежде всего заметим, что

$$\|x\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|e_j\| \leqslant \|x\|_2 \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|.$$

Поэтому $\|x\| \leqslant c_2\|x\|_2$, где $c_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \|e_j\|$.

Для оценки нормы $\|x\|$ снизу рассмотрим функцию $f(x) = \|x\|$. Ее можно рассматривать как функцию от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, определенную на $\mathbb{R}^n$. Из неравенства

$$|f(x) - f(y)| = \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\| \leqslant c_2 \|x - y\|_2$$

следует, что она непрерывна на $\mathbb{R}^n$. В частности, она непрерывна и на единичной сфере $S_1 \subset \mathbb{R}^n$, причем если $\|x\|_2 = 1$, то $f(x) > 0$. А так как сфера S_1 — компакт, то

$$\exists\, x_0 \in S_1 : \inf_{x \in S_1} f(x) = f(x_0) > 0,$$

и поэтому $\forall\, x \in S_1 \quad \|x\| \geqslant c_1$, где $c_1 = f(x_0)$. Тогда

$$\forall\, x \neq 0 \quad \|x\| = \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geqslant \|x\|_2 c_1.$$

Для $x = 0$ неравенство $\|x\| \geqslant c_1 \|x\|_2$ очевидно.

Теорема доказана, поскольку любые две нормы $\|x\|$ и $\|x\|_*$, эквивалентные $\|x\|_2$, эквивалентны.

Легко показать, что в линейном пространстве $C[a; b]$ нормы (3) и (4) не являются эквивалентными.

Для доказательства, не ограничивая общности, можно считать, что $a = 0$, $b = \pi$. Тогда рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$ таких, что $f_n(x) = \sin nx$, если $0 \leqslant nx \leqslant \pi$, и $f_n(x) = 0$ при других x. Очевидно,

$$\max_x |f_n(x)| = 1, \qquad \int_0^\pi |f_n(x)|\, dx = \frac{2}{n},$$

и поэтому эти нормы не могут быть эквивалентными.

Пусть в линейном нормированном пространстве X выделена некоторая система элементов

$$x_\alpha, \quad \alpha \in A, \tag{6}$$

где A — множество индексов.

Определение 6. Система элементов (6) называется *полной* в пространстве X, если ее линейная оболочка плотна в X, т.е. если для любого элемента $x \in X$ выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ системы (6) и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что

$$\left\| x - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon.$$

Определение 7. Линейное нормированное пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетная система элементов, линейная оболочка которой плотна в этом пространстве.

Из теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами следует, что в пространстве $C[a;b]$ система функций

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{7}$$

является полной. Следовательно, *пространство* $C[a;b]$ *сепарабельное.*

Легко доказать, что пространство $L_p(\Delta)$, где $p \geqslant 1$ и $\Delta = [a;b]$, тоже является сепарабельным.

Определение 8. Последовательность элементов $e_1, e_2, \ldots, \ldots, e_n, \ldots$ линейного нормированного пространства X называется *базисом пространства* X, если каждый элемент $x \in X$ имеет и притом единственное разложение по этой системе, т.е. если существует и притом единственная последовательность чисел λ_n, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Здесь ряд сходится к элементу x по норме пространства X, т.е. выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \quad \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Очевидно, что система функций (7) хотя и является полной в пространстве $C[a;b]$, однако она не будет базисом в этом пространстве. Типичным примером базиса является тригонометрическая система $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$, являющаяся базисом в пространстве $L_2[-\pi;\pi]$.

3.3. Теорема о пополнении нормированных пространств. Полное нормированное пространство X^* называется *пополнением нормированного пространства* X, если в X^* существует подпространство X', которое изоморфно пространству X и плотно в пространстве X^*.

Напомним, что плотность X' в X^* означает, что для любого $x^* \in X^*$ выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in X': \quad \|x^* - x'\|_* < \varepsilon,$$

где $\|\ldots\|_*$ обозначает норму в X^*.

Теорема. *Любое линейное нормированное пространство имеет пополнение.*

Доказательство. Любое нормированное пространство X является метрическим с метрикой $\rho(x,y) = \|x - y\|$. При доказательстве теоремы о пополнении метрического пространства X было построено полное метрическое пространство X^*, элементами которого являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей элементов из X, и было показано, что мно-

жество X', элементами которого являются классы последовательностей, каждый из которых содержит постоянную последовательность, изометрично пространству X и плотно в X^*.

Для доказательства настоящей теоремы достаточно в X^* ввести линейные операции и норму так, чтобы X' было подпространством пространства X^* и чтобы оно было изоморфно пространству X.

Пусть $x^* \in X^*$ и $y^* \in X^*$. Тогда если $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, то через $x^* + y^*$ обозначим класс эквивалентных последовательностей, который содержит фундаментальную последовательность $\{x_n + y_n\}$, а через λx^*, где λ — число, обозначим класс, содержащий последовательность $\{\lambda x_n\}$. Легко проверяется, что тогда X^* — линейное пространство, а X' — его подпространство, т.е. X' замкнуто относительно введенных линейных операций.

Чтобы ввести норму в X^*, заметим, что если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ тоже фундаментальная, так как

$$\Big| \|x_n\| - \|x_m\| \Big| \leqslant \|x_n - x_m\| \quad \forall n, m.$$

Поэтому по определению положим $\|x^*\|_* = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Легко видеть, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\} \in X^*$. Кроме того, если $x^* \in X'$ и $\{x\} \in x^*$, то $\|x^*\|_* = \|x\|$.

Функция $\|x^*\|_*$ на X^* удовлетворяет всем аксиомам нормы. Действительно,

$$\|\lambda x^*\|_* = \lim_{n\to\infty} \|\lambda x_n\| = \lambda \|x^*\|_*,$$

$$\|x^* + y^*\|_* = \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} (\|x_n\| + \|y_n\|) = \|x^*\|_* + \|y^*\|_*.$$

Теорема доказана.

Так как в теории линейных нормированных пространств изоморфные пространства не различаются, то линейное нормированное пространство X', построенное при доказательстве теоремы о пополнении, отождествляется с пространством X, и поэтому доказанную теорему часто формулируют так:

Любое линейное нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.

3.4. Примеры линейных нормированных пространств. В п. 3.2 уже были рассмотрены линейные нормированные пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}[a;b]$ и $\mathbb{C}L_1[a;b]$. В этом пункте рассмотрим еще несколько важных примеров нормированных пространств.

Пример 1. Рассмотрим семейство линейных нормированных пространств, элементами которых являются точки из $\mathbb{R}^n$, а норма для $x =$

$= (x_1, \ldots, x_n)$ определяется по формуле

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, \tag{1}$$

где $p \geqslant 1$. В частных случаях, когда $p = 1$ и $p = 2$, известно, что функция (1) на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. В общем случае достаточно проверить, что для этой функции справедливо неравенство треугольника.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любых неотрицательных чисел a и b и любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{2}$$

где q такое, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$y = x^{p-1}, \quad x \geqslant 0.$$

Она на промежутке $[0; +\infty)$ строго возрастает и имеет обратную

$$x = y^{q-1}, \quad y \geqslant 0.$$

Очевидно, площадь криволинейной трапеции $0aA$ (рис. 17.1) равна $\dfrac{1}{p}a^p$, а площадь криволинейной трапеции ObB равна $\dfrac{1}{q}b^q$. Кроме того, для любых $a > 0$ и $b > 0$ объединение этих трапеций содержит прямоугольник $[0; a] \times [0; b]$, площадь которого равна ab. Следовательно, для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ справедливо неравенство (2), причем равенство будет достигаться тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают, то есть когда $b = a^{p-1}$. Лемма 1 доказана.

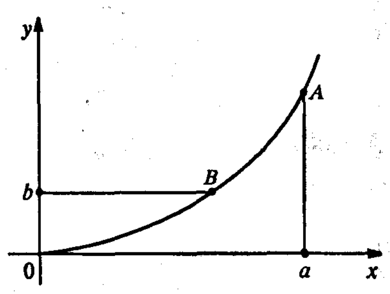


Рис. 17.1

Лемма 2. *Для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q, \tag{3}$$

где q такое, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Очевидно, если $\|x\|_p = 0$ или $\|y\|_q = 0$, то неравенство (3) справедливо. Предположим, что $\|x\|_p \neq 0$ и $\|y\|_q \neq 0$, и в неравенстве (2) положим

$$a = \frac{|x_j|}{\|x\|_p}, \quad b = \frac{|y_j|}{\|y\|_q}.$$

Тогда

$$\frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Просуммируем эти неравенства по j от 1 до n. В результате получим:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Лемма 2 доказана.

Неравенство (3) называется *неравенством Гельдера* для сумм. В частном случае при $p = q = 2$ оно обращается в неравенство Буняковского.

Применяя неравенство Гельдера, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1} |y_j| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \cdot \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right).$$

А так как $(p-1)q = p$, то

$$\|x + y\|_p^p \leqslant \|x + y\|_p^{p/q} \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right),$$

и, следовательно,

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Это неравенство треугольника для нормы (1) называется *неравенством Минковского* для сумм.

Лемма 3. *Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство*

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} = \max_j |x_j|. \tag{4}$$

Действительно, пусть, например, $\max_j |x_j| = |x_1|$, $x_1 \neq 0$. Тогда

$$\|x\|_p = |x_1| \left(1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{|x_j|^p}{|x_1|^p}\right)^{1/p} \to |x_1|$$

при $p \to +\infty$.

Равенство (4) можно записать в следующем виде:

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j|.$$

Используя это обозначение, в случае $p = 1$ получаем неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leqslant \|x\|_1 \|y\|_\infty,$$

которое аналогично неравенству Гельдера в случае $p > 1$.

Очевидно, что для любого $p \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

Из того, что в $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны, и того, что $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_2$ полно, следует, что $\mathbb{R}^n$ с любой нормой является полным пространством.

Пример 2. Пусть X — множество всех ограниченных числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$, ... Линейные операции для них введем обычным образом. Именно, если $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$, то по определению положим

$$x + y = \{\xi_k + \eta_k\}, \quad \alpha x = \{\alpha \xi_k\},$$

где α — число. Очевидно, сумма двух ограниченных последовательностей и произведение ограниченной последовательности на число являются ограниченными последовательностями. В этом линейном пространстве норму введем с помощью равенства

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|. \tag{5}$$

Легко проверяется, что функция (5) на множестве X удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Так полученное нормированное пространство называется *пространством m ограниченных числовых последовательностей*. Покажем, что это пространство полное.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства m является фундаментальной, т.е. если $x_n = \{\xi_k^n\}$, то выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N, \forall p \quad \sup_k |\xi_k^n - \xi_k^{n+p}| < \varepsilon. \tag{6}$$

Тогда для любого фиксированного k числовая последовательность $\{\xi_k^n\}$ тоже фундаментальная и, следовательно, имеет предел. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^n = \xi_k.$$

В неравенстве $|\xi_k^n - \xi_k^{n+p}| < \varepsilon$, которое следует из неравенства (6), перейдем к пределу при $p \to \infty$. В результате для любого k получим неравенство

$$|\xi_k^n - \xi_k| \leqslant \varepsilon \quad \forall n \geqslant N.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_k |\xi_k^n - \xi_k| \leqslant \varepsilon \quad \forall n \geqslant N,$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x = \{\xi_k\}$. Чтобы завершить доказательство, заметим, что $\|x\| < +\infty$. Действительно,

$$\|x\| \leqslant \|x - x_N\| + \|x_N\| \leqslant \varepsilon + \|x_N\| < +\infty.$$

Таким образом, *пространство m ограниченных числовых последовательностей банахово.*

Пример 3. Пусть X — множество всех сходящихся числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$, ... Линейные операции и норму введем так же, как и в пространстве m ограниченных числовых последовательностей. Полученное линейное нормированное пространство является подпространством пространства m. Оно называется *пространством c сходящихся последовательностей.* Покажем, что это пространство полное.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства c является фундаментальной. Из полноты пространства m следует, что $\{x_n\}$ сходится к некоторому $x = \{\xi_k\} \in m$.

Последовательность $\{\xi_k\}$ сходящаяся. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$|\xi_{k+p} - \xi_k| \leqslant |\xi_{k+p} - \xi_{k+p}^N| + |\xi_{k+p}^N - \xi_k^N| + |\xi_k^N - \xi_k| + \leqslant$$
$$\leqslant 2\|x - x_N\| + |\xi_{k+p}^N - \xi_k^N| < 2\varepsilon + |\xi_{k+p}^N - \xi_k^N|$$

для любых k и p. А так как последовательность $\{\xi_k^N\}$ сходящаяся, то отсюда следует, что последовательность $\{\xi_k\}$ фундаментальная, и поэтому тоже сходящаяся.

Таким образом, *пространство c сходящихся числовых последовательностей банахово.*

Пример 4. Пусть X — множество всех числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$, ... , для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p, \quad p \geqslant 1,$$

сходится.

Результаты линейных операций, определенных так же, как и в примерах 2 и 3, принадлежат множеству X. Действительно, если $x = \{\xi_k\}$ и $y = \{\eta_k\}$ принадлежат X, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p}$$

Отсюда при $n \to \infty$ получаем неравенство Гельдера для бесконечных сумм

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p},$$

из которого следует, что множество X с введенными операциями является линейным пространством, а для функции

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p},$$

справедливо неравенство треугольника. Другие аксиомы нормы очевидны.

Полученное линейное нормированное пространство называется *пространством* l_p. Докажем, что это пространство полное.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства l_p, $p \geqslant 1$, является фундаментальной, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \forall n, m \geqslant N \quad \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon, \tag{7}$$

и, в частности, если $x_n = \{\xi_k^n\}$, то $|\xi_k^n - \xi_k^m| < \varepsilon \quad \forall k$. Следовательно, при каждом фиксированном k последовательность $\{\xi_k^n\}$ имеет предел. Пусть $\xi_k^n \to \xi_k$ при $n \to \infty$, и пусть $x = \{\xi_k\}$.

Из неравенства (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k^m|^p < \varepsilon^p$$

для любого $M \in \mathbb{N}$ и любых $n, m \geqslant N$, и поэтому в пределе при $m \to +\infty$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k|^p \leqslant \varepsilon^p \quad \forall n \geqslant N.$$

Отсюда при $M \to +\infty$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n - \xi_k|^p \leqslant \varepsilon^p \quad \forall n \geqslant N,$$

т.е. $\|x_n - x\|_p \leqslant \varepsilon \quad \forall n \geqslant N$.

Наконец, из неравенства

$$\|x\|_p \leqslant \|x - x_N\|_p + \|x_N\|_p \leqslant \varepsilon + \|x_N\|_p$$

следует, что $x \in l_p$.

Таким образом, *пространство l_p банахово.*

Пример 5. Рассмотрим множество всех функций f, определенных и непрерывных на отрезке $[a; b]$. Очевидно, это множество с естественными линейными функциями является линейным пространством. На этом пространстве рассмотрим функцию

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{8}$$

и покажем, что она при любом $p \geqslant 1$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. Очевидно, нуждается в проверке только неравенство треугольника. Для этого сначала докажем *неравенство Гельдера для интегралов.*

Лемма 4. *Для любых двух функций f и g, определенных и непрерывных на отрезке $[a; b]$, и любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q, \tag{9}$$

где q такое, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Доказательство. Очевидно, если $\|f\|_p = 0$ или $\|g\|_q = 0$, то неравенство (9) справедливо. Предположим, что $\|f\|_p \neq 0$ и $\|g\|_q \neq 0$, и применим неравенство (2) к числам

$$A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}.$$

Тогда

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Проинтегрируем это неравенство по x от a до b. В результате получим:

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Лемма 4 доказана.

Теперь, применяя неравенство Гельдера, как и в примере 2 для сумм, получаем:

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx+$$

$$+\int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx \leqslant \|f+g\|_p^{p/q}\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)$$

и, следовательно,

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p$$

для любого $p>1$. Для $p=1$ оно очевидно.

Это неравенство называется *неравенством Минковского для интегралов*.

Таким образом, в линейном пространстве всех функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a;b]$, можно ввести норму по формуле (8). Это линейное нормированное пространство обозначается $CL_p[a;b]$ или $L_p^c[a;b]$.

Как и в случае $p=1$ (см. п. 1.2), доказывается, что пространство $CL_p[a;b]$ является неполным. Пополнение этого пространства обозначается $L_p[a;b]$ и называется *пространством функций, суммируемых в p-й степени.*

§ 4. Операторы в линейных нормированных пространствах

4.1. Общие замечания. В этом параграфе будем рассматривать операторы, действующие из одного линейного нормированного пространства в другое. Для таких операторов имеют смысл все понятия, введенные в § 2 для отображений одного метрического пространства в другое, и остаются справедливыми все доказанные там утверждения. Здесь лишь напомним некоторые общепринятые обозначения и понятия.

Пусть задан оператор f, действующий из множества X в множество Y. Через D_f или $D(f)$, как обычно, будем обозначать область определения оператора f, а через R_f или $R(f)$ — множество его значений. В общем случае не предполагается, что $D_f=X$ или $R_f=Y$.

Пусть заданы два оператора f и F, действующие из X в Y. Они называются *равными*, если $D_f=D_F$ и $f(x)=F(x)$ для любого $x\in D_f$. Если же $D_f\subset D_F$ и $f(x)=F(x)$ для любого $x\in D_f$, то оператор F называется *расширением оператора* f, а оператор f — *сужением оператора* F.

Как известно, вместо термина "оператор" можно использовать термины "функция" или "отображение".

Определение 1. Оператор f, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, называется *ограниченным*, если он любое множество $M \subset D_f$, ограниченное в X, переводит в множество $f(M)$, ограниченное в Y.

Короче, оператор f называется ограниченным, если образ любого ограниченного множества из D_f является ограниченным.

Отметим, что линейная функция $y = ax + b$, $a \neq 0$, рассматриваемая как оператор, отображающий $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, является ограниченным оператором. В этом смысле и функция $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является ограниченным оператором.

Определение 2. Последовательность операторов f_n, действующих из X в Y, называется *сходящейся на множестве* $D \subset X$, если $D \subset D_{f_n}$ $\forall n$, $D \subset D_f$ и $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для любого $x \in D$.

В этом случае иногда говорят, что f_n при $n \to \infty$ *сходится поточечно на* D *к* f.

Таким образом, $f_n \to f$ при $n \to \infty$ поточечно на D, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0 \quad \forall x \in D.$$

Если же

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \|f_n(x) - f(x)\| = 0,$$

то говорят, что f_n *сходится к* f *равномерно на множестве* D.

Сделаем еще несколько замечаний относительно линейных операторов.

Пусть X и Y — линейные пространства (оба над полем действительных чисел или оба над полем комплексных чисел).

Определение 3. Оператор f, действующий из X в Y, называется *линейным*, если D_f — линейное многообразие, и если

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in D_f$ и любых чисел α_1, α_2.

Легко видеть, что у любого линейного оператора множество значений является линейным многообразием.

Как и в линейной алгебре, линейные операторы будем обозначать в основном буквами A, B и т.д. и писать $y = Ax$, $y = Bx$ и т.д.

Из данного определения видно, что линейный оператор A, действующий из X в Y, не обязан быть заданным на всем X, но он всегда задан на линейном многообразии, т.е. на линейном подпространстве пространства X.

Если ограничить себя только рассмотрением линейных пространств, то не ограничивая общности, можно считать, что линейный оператор, действующий из X в Y, определен для любого $x \in X$.

Если же X — нормированное пространство, то наиболее интересным является случай, когда область определения линейного оператора плотна в X. Однако если этот линейный оператор ограничен, то, как будет показано ниже, его можно продолжить по непрерывности на все пространство X. А так как изучение неограниченных операторов выходит за рамки нашего курса, то в дальнейшем будем считать, что любой линейный оператор, действующий из X в Y, определен на всем пространстве X.

Через $L(X;Y)$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, отображающих X в Y.

4.2. Линейные операторы. Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. Легко видеть, что линейный оператор A непрерывен в любой точке области определения $D_A \subset X$, если он непрерывен в точке $x = 0$. Действительно, если $x_0 \in D_A$ и $x \in D_A$, то $x - x_0 \in D_A$ и $Ax - Ax_0 = A(x - x_0)$. Поэтому если оператор A непрерывен в точке $x = 0$, то $A(x - x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, и, следовательно, $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$, $x \in D_A$.

Теорема 1. *Если линейный оператор A, действующий из X в Y, ограничен на единичном шаре, т.е. если существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\|Ax\| \leqslant C \quad \forall x \in D_A, \quad \|x\| \leqslant 1,$$

то он ограничен на D_A.

Действительно, если множество $M \subset D_A$ ограничено, то

$$\exists R > 0: \ \|x\| \leqslant R \quad \forall x \in M,$$

и поэтому

$$\forall x \in M \quad \|Ax\| = R\left\|A\left(\frac{x}{R}\right)\right\| \leqslant RC.$$

Следовательно, оператор A любое ограниченное множество $M \subset D_A$ переводит в ограниченное множество пространства Y.

Определение 1. Для любого линейного оператора A, действующего из X в Y, величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|, \quad x \in D_A,$$

называется *нормой оператора* A.

Таким образом, всегда $\|A\| \geqslant 0$. В частности, если $\|A\| = 0$, то A — нулевой оператор. Если же $\|A\| = +\infty$, то A — неограниченный оператор.

Из теоремы 1 следует, что линейный оператор ограничен тогда и только тогда, когда его норма ограничена.

Следствие 1. *Линейный оператор A, действующий из X в Y, ограничен тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\|Ax\| \leqslant C\|x\| \quad \forall x \in D_A.$$

Очевидно,

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leqslant \|A\|.$$

С другой стороны, если $0 < \|x\| \leqslant 1$, то

$$\|Ax\| = \|x\| \cdot \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|,$$

и поэтому

$$\|A\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Таким образом, для любого линейного оператора A справедливо равенство

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in D_A.$$

Следствие 2. *Для любого линейного оператора A, действующего из X в Y, справедливо неравенство*

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in D_A.$$

Следствие 3. *Если линейный оператор A ограничен, то он непрерывен в любой точке $x_0 \in D_A$.*

Действительно, так как

$$\|Ax - Ax_0\| \leqslant \|A\| \cdot \|x - x_0\|,$$

то $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$.

Для линейного оператора A, у которых $D_A = X$, справедливо следующее, кажущееся неожиданным, утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы линейный оператор $A : X \to Y$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в точке $x = 0$.*

Доказательство. Уже доказано, что если оператор A ограничен, то он непрерывен. Обратное утверждение докажем методом от противного.

Допустим, что линейный оператор A является непрерывным в точке $x = 0$, но не является ограниченным на X. Тогда для

любого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $x_n \in X$ такой, что $\|x_n\| \leqslant 1$, $\|Ax_n\| \geqslant n$, и, следовательно,

$$\left\|A\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| \geqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, так как

$$\left\|\frac{x_n}{n}\right\| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и оператор A непрерывен в точке $x = 0$, то

$$\left\|A\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверное. Теорема 2 доказана.

В конце этого пункта докажем теорему о продолжении линейного оператора по непрерывности.

Пусть A — линейный оператор, у которого область определения D_A плотна в пространстве X. Кроме того, будем считать, что пространство Y банахово.

Теорема 3. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства X в банахово пространство Y. Тогда если D_A плотна в X, то существует линейный ограниченный оператор $\overline{A} : X \to Y$ такой, что $\overline{A}x = Ax$ $\forall x \in D_A$ и $\|\overline{A}\| = \|A\|$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, но $x \notin D_A$. В силу плотности D_A в X существует последовательность элементов $x_n \in D_A$ таких, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Из неравенства

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|$$

и ограниченности оператора A следует, что последовательность Ax_n, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальная. А так как пространство Y банахово, то эта последовательность имеет предел. Положим

$$\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

и покажем, что это определение корректное.

Пусть $x'_n \in D_A$ и $x'_n \to x$ при $n \to \infty$, и пусть

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \quad y' = \lim_{n\to\infty} Ax'_n.$$

Тогда

$$\|y - y'\| \leqslant \|y - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax'_n\| + \|Ax'_n - y'\| \to 0$$

при $n \to \infty$, поскольку

$$\|Ax_n - Ax'_n\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x'_n\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $y = y'$.

Линейность оператора $\overline{A}$ очевидным образом следует из линейности оператора A и свойства линейности предела.

Наконец, очевидно, что $\|A\| \leqslant \|\overline{A}\|$. С другой стороны, из неравенства

$$\|Ax_n\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n\|$$

при $n \to \infty$ следует, что

$$\|\overline{A}x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X,$$

и поэтому $\|\overline{A}\| \leqslant \|A\|$. Теорема 3 доказана.

4.3. Примеры ограниченных линейных операторов. Как известно, любой линейный оператор, отображающий $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, задается равенством

$$y = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где A — квадратная матрица порядка n, а x и y — n-мерные столбцы:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Если a_{ij} — элементы матрицы A, то матричное равенство (1) в координатах записывается так:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Так как в $\mathbb{R}^n$ норму можно задавать разными способами, то одно и то же равенство (1) или (2) может задавать различные линейные операторы. Рассмотрим несколько примеров таких операторов.

Пример 1. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем норму по формуле

$$\|x\|_c = \max_j |x_j|$$

и через c^n обозначим полученное нормированное пространство. Будем рассматривать A как оператор, действующий из c^n в c^n.

Из (2) следует, что

$$|y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_c, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и поэтому

$$\|y\|_c \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_c \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, оператор $A : c^n \to c^n$ ограничен, причем

$$\|A\| \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \qquad (3)$$

Покажем, что в действительности здесь выполняется равенство.

Не ограничивая общности, будем считать, что максимум в (3) достигается при $i = 1$. Тогда для x с координатами $x_j = \operatorname{sgn} a_{ij}$ выполняется равенство

$$\|y\|_c = y_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Отсюда и из (3) следует, что

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Пример 2. Через l_p^n, $p > 1$, обозначим линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

и будем рассматривать A как оператор, действующий из l_p^n в l_q^n, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\|y\|_q = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|^q \right)^{1/q}$$

А так как, согласно неравенству Гельдера,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \qquad (4)$$

29 Зак. 193

то

$$\|y\|_q \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} \|x\|_p.$$

Следовательно, оператор $A : l_p^n \to l_q^n$ ограничен, причем

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} \qquad (5)$$

Можно показать, что в действительности здесь выполняется равенство.

Пример 3. Пусть оператор A действует из l_p^n в l_p^n, $p > 1$. Тогда из равенства

$$\|y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^p\right)^{1/p}$$

и неравенства (4) следует, что

$$\|y\|_p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p} \|x\|_p.$$

Следовательно, оператор $A : l_p^n \to l_p^n$ ограничен, причем

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}.$$

Можно доказать, что в действительности здесь выполняется равенство.

Аналогично линейным операторам из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ можно рассмотреть линейные операторы, заданные равенствами

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (6)$$

и действующие из одного пространства последовательностей в другое. При некоторых ограничениях на бесконечную матрицу A с элементами a_{ij} эти операторы будут ограниченными.

Пример 4. Через m обозначим пространство ограниченных числовых последовательностей и покажем, что оператор $A : m \to m$, заданный равенствами (6), ограничен, если

$$\gamma = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty.$$

Из (6) следует, что

$$\forall i \quad |y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot \|x\|_m \leqslant \gamma \|x\|_m,$$

и поэтому

$$\|y\|_m \leqslant \gamma \|x\|_m.$$

Следовательно, оператор $A : m \to m$ ограничен, причем $\|A\| \leqslant \gamma$.

Докажите, что $\|A\| = \gamma$.

Пример 5. Через l_p, $p > 1$, обозначим линейное пространство последовательностей с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

и покажем, что оператор $A : l_p \to l_q$, заданный равенствами (6), ограничен, если

$$\beta = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^q \right)^{1/q} < +\infty.$$

Как и в примере 2, получаем:

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| x_j \right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{1/q} \|x\|_p, \qquad \|y\|_q \leqslant \beta \|x\|_p.$$

Следовательно, оператор $A : l_p \to l_q$ ограничен, причем $\|A\| \leqslant \beta$.

Докажите, что $\|A\| = \beta$.

Аналогично доказывается, что если

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \right)^{1/p} < +\infty,$$

то оператор $A : l_p \to l_p$, $p > 1$, заданный равенствами (6), ограничен, причем

$$\|A\| = \alpha.$$

Пример 6. Рассмотрим теперь линейные операторы вида

$$v(x) = \int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

где функция $K(x,\xi)$ непрерывна на квадрате $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$, где $\Delta = [a;b]$.

Такие операторы называются *интегральными*, а функция $K(x,\xi)$ — *ядром* этого оператора. Обычно интегральный оператор (7) обозначают той же буквой, что и его ядро.

Очевидно, оператор $K : C(\Delta) \to C(\Delta)$ ограничен, причем

$$\|v\|_C \leqslant \left\| \int_a^b |K(x,\xi)|\,d\xi \right\|_C \cdot \|u\|_C.$$

Оператор $K : CL_p(\Delta) \to CL_q(\Delta)$ тоже ограничен. Именно, как и в примере 2, доказывается, что

$$\|v\|_{L_q} \leqslant \|K\|_{L_q} \cdot \|u\|_{L_p}, \tag{8}$$

где

$$\|K\|_q = \left(\int_{\Delta^2} |K(x,\xi)|^q\,dx\,d\xi \right)^{1/q}.$$

Предельным переходом можно доказать, что оператор $K : L_p(\Delta) \to$ $\to L_q(\Delta)$ ограничен и для него справедливо неравенство (8).

4.4. Пространства линейных ограниченных операторов. Множество $L(X;Y)$ всех ограниченных линейных операторов, отображающих нормированное пространство X в нормированное пространство Y, с естественными операциями сложения двух операторов и умножения оператора на число является линейным пространством, а норма оператора является нормой в этом линейном пространстве.

Действительно, если A и B — линейные операторы, действующие из X в Y, то для любых чисел α и β оператор $C = \alpha A + \beta B$, определяемый равенством

$$Cx = \alpha Ax + \beta Bx \quad \forall x \in X,$$

тоже линеен, так как

$$C(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \alpha(\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2) + \beta(\lambda_1 Bx_1 + \lambda_2 Bx_2) =$$
$$= \lambda_1(\alpha Ax_1 + \beta Bx_1) + \lambda_2(\alpha Ax_2 + \beta Bx_2) = \lambda_1 Cx_1 + \lambda_2 Cx_2.$$

Далее, если операторы A и B ограничены, то операторы $A + B$ и αA тоже ограничены, так как

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax + Bx\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \|A\| + \|B\|,$$

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

Кроме того, $\|A\| \geqslant 0\ \forall A \in L(X;Y)$, причем, если $\|A\| = 0$, то $Ax = 0\ \forall x \in X$. Следовательно, норма оператора удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Таким образом, $L(X;Y)$ — линейное нормированное пространство.

Пусть $A_n \in L(X;Y)$ и $A \in L(X;Y)$. Из очевидного равенства

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|A_n x - Ax\| = \|A_n - A\|$$

следует, что сходимость последовательности линейных операторов по норме пространства $L(X;Y)$ равносильна равномерной сходимости этой последовательности на шаре $\|x\| \leqslant 1$. Поэтому если $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что *последовательность операторов A_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно к оператору A.*

Теорема 1. *Если пространство X нормированное, а пространство Y банахово, то пространство $L(X;Y)$ тоже банахово.*

Доказательство. Пусть последовательность операторов $A_n \in L(X;Y)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальная. Из неравенства

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| \leqslant \|A_{n+p} - A_n\| \cdot \|x\|$$

следует, что при любом $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ тоже фундаментальная. А так как пространство Y полное, то эта последовательность имеет предел. Положим

$$y = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Эта формула определяет линейный оператор $y = Ax$. Докажем, что он ограничен.

Из неравенства $|\|A_{n+p} - \|A_n\|| \leqslant \|A_{n+p} - A_n\|$ следует, что числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ фундаментальная и, как следствие, ограниченная. Пусть $\|A_n\| \leqslant C \quad \forall n$. Тогда

$$\|A_n x\| \leqslant \|A_n\| \cdot \|x\| \leqslant C\|x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ получаем неравенство

$$\|Ax\| \leqslant C\|x\|,$$

справедливое для любого $x \in X$. Теорема 1 доказана.

Наряду с равномерной сходимостью в пространстве $L(X;Y)$ можно рассматривать и поточечную сходимость.

Очевидно, если $A_n \to A$ при $n \to \infty$ равномерно, то $A_n \to A$ при $n \to \infty$ поточечно. Следующий пример показывает, что обратное утверждение является неверным.

Пример. Рассмотрим пространство l_2 последовательностей $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

В этом пространстве исследуем действие оператора проектирования $y = P_n x$, который последовательности x ставит в соответствие последовательностям $y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots\}$. Тогда

$$\|P_n x - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $x \in l_2$. Следовательно, $P_n \to I$ при $n \to \infty$ поточечно, где I — тождественный оператор в l_2. Однако эта сходимость не будет равномерной. Действительно, если $\|x\| = 1$ и $P_n x = 0$, то $\|P_n x - x\| = \|x\| = 1$. Следовательно,

$$\|P_n - I\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|P_n x - x\| \geqslant 1.$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

4.5. Дифференцируемые операторы. Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, и пусть f — произвольный оператор, действующий из X в Y, с областью определения $D_f \subset X$.

Определение 1. Оператор f, определенный в некоторой окрестности точки $x \in D_f$, называется *дифференцируемым в точке* x, если существует линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ такой, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|} = 0. \qquad (1)$$

Линейный ограниченный оператор A называют *дифференциалом Фреше оператора f в точке x* и обозначают Df или, более подробно, $Df(x)$.

Оператор α, заданный равенством

$$\alpha(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|},$$

определен в некоторой окрестности точки $h = 0$, кроме самой этой точки. Доопределим его, положив $\alpha(0) = 0$. Тогда условие (1) можно записать в виде следующего равенства:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \alpha(h)\|h\|,$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Как и для числовых функций, в определении дифференцируемости операторов удобно использовать понятие "бесконечно малый оператор" и символ "o-малое".

Определение 2. Оператор β, действующий из X в Y, называется *бесконечно малым при $x \to x_0$, $x_0 \in D_\beta$*, если

$$\lim_{x \to x_0} \|\beta(x)\| = 0.$$

В этом случае будем писать

$$\beta(x) = o(1) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Если $\beta(x) = \varepsilon(x)\|x - x_0\|$, где $\varepsilon(x) = o(1)$ при $x \to x_0$, то, как обычно, будем писать

$$\beta(x) = o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Используя эти понятия, определение дифференцируемости оператора можно сформулировать следующим образом.

Определение 1′. Оператор f называется *дифференцируемым в точке $x \in D_f$*, если существует линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ такой, что

$$f(x+h) - f(x) - Ah = o(h) \tag{2}$$

при $h \to 0$.

Асимптотическое равенство (2), как и для числовых функций, записывают еще и так:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h)$$

при $h \to 0$.

Таким образом, если оператор f дифференцируем в точке $x \in D_f$, то

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)h + o(h)$$

при $h \to 0$.

Легко доказываются следующие утверждения:

1. *Если операторы f и g, действующие из X в Y, дифференцируемы в точке x, то для любых чисел λ и μ оператор $\lambda f + \mu g$ тоже дифференцируем в точке x и*

$$D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg.$$

2. *Если оператор f, действующий из X в Y, дифференцируем в точке x, а оператор g, действующий из Y в нормированное пространство Z, дифференцируем в точке $y = f(x)$, то композиция $g \circ f$, задаваемая равенством $z = g(f(x))$, дифференцируема в точке x и*

$$D(g \circ f) = Dg \circ Df.$$

Наряду с введенным понятием дифференцируемости бывает полезным понятие дифференцируемости по направлению.

Определение 3. Оператор f называется *дифференцируемым в точке $x \in D_f$ по направлению h*, если существует предел

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Этот предел называют *производной Гато по направлению h оператора f в точке x* и обозначают $D_h f$ или $D_h f(x)$.

Таким образом, согласно определению,

$$f(x+th) = f(x) + tD_h f(x) + o(th)$$

при $t \to +0$.

Отметим, что в заданной точке $x \in D_f$ дифференциал Фреше — это элемент пространства $L(X;Y)$, а производная Гато — это элемент пространства Y.

Очевидно, что если в точке x оператор f дифференцируем (по Фреше), то он дифференцируем по любому направлению h, причем

$$D_h f(x) = Df(x)h.$$

Действительно, если оператор f дифференцируем в точке x, то

$$f(x+th) = f(x) + tDf(x)h + o(th)$$

при $t \to +0$.

§ 5. Пространства со скалярным произведением

5.1. Евклидовы пространства. Понятие скалярного произведения векторов и элементов линейного пространства вводится в аналитической геометрии и соответственно в линейной алгебре. Напомним, что в линейной алгебре, как правило, рассматриваются лишь конечномерные пространства. Здесь введем понятие скалярного произведения для элементов произвольного линейного пространства.

Определение 1. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Функция $(\ ,\ ) : E \times E \to \mathbb{R}$, которая каждой упорядоченной паре элементов x, y из E ставит в соответствие некоторое действительное число, обозначаемое (x, y), и которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $(x,x) \geqslant 0 \quad \forall x \in E;$ (1)

2. $(\alpha x, y) = \alpha(x,y) \quad \forall x,y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R};$ (2)

3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall\, x, y, z \in E;$ (3)

4. $(x, y) = (y, x) \quad \forall\, x, y \in E,$ (4)

называется *почти скалярным произведением элементов линейного пространства E.*

Из свойств (2) и (4) следует, что

$$(x, \beta y) = \beta(x, y) \quad \forall\, x, y \in E, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R},$$

а из свойства (3) при $x = y = 0$ следует, что

$$(0, z) = 0 \quad \forall\, z \in E.$$

Теорема. *В линейном пространстве E, в котором введено почти скалярное произведение, функция*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in E, \tag{5}$$

является полунормой.

Доказательство. Очевидно,

$$\|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in E, \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Осталось доказать лишь *неравенство треугольника*:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{6}$$

Для этого сначала докажем так называемое *неравенство Коши–Буняковского.*

Лемма. *Для любых x и y из E справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно,

$$0 \leqslant (\alpha x - y, \alpha x - y) = \alpha^2\|x\|^2 - 2\alpha(x, y) + \|y\|^2$$

для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому если $\|x\| = 0$, то $(x, y) = 0$, и, следовательно, в этом случае неравенство (7) справедливо. Если же $\|x\| > 0$, то, полагая $\alpha = \dfrac{(x, y)}{\|x\|^2}$, получаем неравенство

$$0 \leqslant -\frac{(x, y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2,$$

которое равносильно неравенству (7), когда $\|x\| \neq 0$. Лемма доказана.

Теперь неравенство (6) легко следует из неравенства (7). Действительно,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Теорема доказана.

28 Зак. 193

Определение 2. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Функция $(\ ,\ ) : E \times E \to \mathbb{R}$ называется *скалярным произведением элементов пространства* E, если она является почти скалярным произведением и, кроме того, удовлетворяет условию:

$$\text{если} \quad (x,x) = 0, \quad \text{то} \quad x = 0. \tag{8}$$

Само число (x, y) называют *скалярным произведением элементов (векторов)* x *и* y, а элементы x и y — его *множителями* или *сомножителями*, соответственно *первым* и *вторым*.

Свойство, выражаемое условиями (1) и (8), называется *положительной определенностью скалярного произведения*, свойство (4) — *коммутативностью*, а свойство, выражаемое условиями (2) и (3), — *линейностью* (по первому сомножителю).

Из коммутативности следует, что скалярное произведение обладает свойством линейности и по второму сомножителю.

Из доказанной теоремы следует, что *любое линейное пространство со скалярным произведением является нормированным пространством с нормой, определяемой равенством* (5).

Норму (5) будем называть *нормой, порожденной заданным скалярным произведением.*

Очевидно, скалярное произведение является непрерывной функцией относительно нормы, порожденной этим скалярным произведением.

Действительно, если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$, то

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leqslant |(x_n, y_n) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$$

при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.

Если, как и в линейных пространствах с полунормой, элементы x, y из E, для которых $\|x - y\| = 0$, считать равными, то вместо "почти скалярное произведение" всегда можно говорить "скалярное произведение". В дальнейшем мы всюду, где не возникает разночтений, будем говорить о скалярных произведениях.

Определение 3. Линейное пространство над полем действительных чисел, для элементов которого определено скалярное произведение, называется *евклидовым пространством.*

Определение 4. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым.*

Неполное евклидово пространство иногда называют *предгильбертовым.*

Очевидно, арифметическое n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, в котором скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и

$y = (y_1, \ldots, y_n)$ определено по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

является евклидовым пространством.

Более того, это пространство полное. В частности, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является линейным пространством над полем действительных чисел, и в нем обычное произведение двух чисел является скалярным произведением элементов этого линейного пространства.

Приведем еще несколько примеров евклидовых пространств.

Пример 1. Линейное нормированное пространство l_2 над полем действительных чисел, в котором скалярное произведение элементов $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ определено по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

является евклидовым пространством. Оно является полным.

Пример 2. Линейное пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $\Delta = [a; b]$, в котором скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ введено по формуле

$$(f, g) = \int_{\Delta} f(x) g(x)\, dx,$$

очевидно, является евклидовым.

Это пространство обозначается $CL_2(\Delta)$. Ранее было показано, что оно неполное.

Аналогично, линейное пространство $RL_2(\Delta)$ функций, определенных и интегрируемых на отрезке $\Delta = [a; b]$, в котором скалярное произведение введено по формуле (8), тоже будет евклидовым. Следует заметить, что здесь элементами являются не отдельные функции, а классы функций. Функции $f(x)$ и $g(x)$ попадают в один класс, если

$$\int_{\Delta} |f(x) - g(x)|^2\, dx = 0.$$

5.2. Унитарные (эрмитовы) пространства. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Определение 1. Функция $(\;, \;) : E \times E \to \mathbb{C}$ называется *скалярным произведением элементов пространства* E, если она удовлетворяет условиям:

1. $(x, x) \geqslant 0 \; \forall x \in E$, причем если $(x, x) = 0$, то $x = 0$;
2. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \; \forall x, y \in E, \; \forall \alpha \in \mathbb{C}$;

3. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)\ \forall\, x,y,z \in E$;

4. $(x,y) = \overline{(y,x)}\ \forall\, x,y \in E$,

где черта означает комплексное сопряжение.

Из свойств 2) и 4) следует, что

$$(x,\beta y) = \overline{\beta}(x,y) \quad \forall\, x,y \in E, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{C}.$$

Действительно,

$$(x,\beta y) = \overline{(\beta y,x)} = \overline{\beta}\,\overline{(y,x)} = \overline{\beta}(x,y).$$

Легко видеть, что

$$(z, x+y) = (z,x) + (z,y).$$

Теорема. *В линейном пространстве E со скалярным произведением функция*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \quad x \in E, \tag{5}$$

является нормой.

Очевидно, достаточно доказать лишь неравенство треугольника, а оно, как и в п. 5.1, следует из неравенства Коши–Буняковского.

Для доказательства неравенства Коши–Буняковского заметим, что

$$0 \leqslant (\alpha x - y, \alpha x - y) = |\alpha|^2\|x\|^2 - \alpha(x,y) - \overline{\alpha}(y,x) + \|y\|^2$$

для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Поэтому если $\|x\| = 0$, то $(x,y) = 0$, и, следовательно, $(x,y) = \|x\|\cdot\|y\|$ для любого $y \in E$. Если же $\|x\| > 0$, то положив $\alpha = \dfrac{(y,x)}{\|x\|^2}$, получим неравенство

$$0 \leqslant \frac{|(x,y)|^2}{\|x\|^2} - \frac{(y,x)}{\|x\|^2}(x,y) - \frac{(x,y)}{\|x\|^2}(y,x) + \|y\|^2 = -\frac{|(x,y)|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2.$$

Таким образом,

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\| \quad \forall\, x,y \in E.$$

Из доказанной теоремы следует, что любое линейное пространство со скалярным произведением является нормированным пространством с нормой, определяемой равенством (5).

Определение 2. Линейное пространство над полем комплексных чисел, для элементов которого определено скалярное произведение, называется *унитарным* (*эрмитовым* или *комплексно евклидовым*) *пространством.*

Полное унитарное пространство называется *гильбертовым.*

Очевидно, арифметическое n-мерное векторное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, в котором скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определено по формуле

$$(x, y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

является эрмитовым пространством.

В частности, в множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ скалярное произведение определяется по формуле $(x, y) = x\overline{y}$.

Пример 1. Унитарным пространством является линейное нормированное пространство l_2 последовательностей комплексных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$, ..., для которых скалярное произведение определено по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}.$$

Пример 2. Линейное пространство функций $f : \Delta \to \mathbb{C}$, определенных и непрерывных на отрезке $\Delta = [a; b]$, в котором скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ введено по формуле

$$(f, g) = \int_{\Delta} f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

является унитарным. Оно обозначается $CL_2(\Delta)$.

Аналогично определяется унитарное пространство $RL_2(\Delta)$.

Пусть E — некоторое евклидово пространство (действительное или комплексное).

Определение 3. Два элемента евклидова пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Определение 4. Произвольная система элементов евклидова пространства называется *ортогональной*, если любые два ее элемента ортогональны. Если, кроме того, норма каждого ее элемента равна единице, то эта система называется *ортонормированной*.

Очевидно, любая ортонормированная система является линейно независимой. Примеры ортонормированных систем были рассмотрены в главе 14.

Пусть в евклидовом пространстве E задана линейно независимая счетная система элементов x_n, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что в E существует счетная ортогональная система y_n, $y \in \mathbb{N}$, такая, что для любого n элемент y_n есть линейная комбинация элементов $x_1, \ldots, x_n$.

Положим $y_1 = x_1$, $y_2 = \alpha_2^1 y_1 - x_2$ и найдем α_2^1 из условия $(y_2, y_1) = 0$. Тогда $\alpha_2^1 \|y_1\|^2 = (x_2, y_1)$. Так как система $\{x_n\}$ ли-

нейно независимая, то $\|y_1\| \neq 0$, и поэтому

$$\alpha_2^1 = \frac{(x_2, y_1)}{\|y_1\|^2}.$$

Далее, $y_3 = \alpha_3^1 y_1 + \alpha_3^2 y_2 - x_3$, где α_3^1 и α_3^2 находим из условий $(y_3, y_1) = (y_3, y_2) = 0$. Очевидно,

$$\alpha_3^1 = \frac{(x_3, y_1)}{\|y_1\|^2}, \quad \alpha_3^2 = \frac{(x_3, y_2)}{\|y_2\|^2}.$$

Пусть уже построена ортогональная система элементов $y_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, таких, что каждое y_k есть линейная комбинация элементов $x_1, \ldots, x_k$. Положим $y_{n+1} = \alpha_{n+1}^1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1}^n y_n - x_{n+1}$ и найдем α_{n+1}^k из условий $(y_{n+1}, y_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\alpha_{n+1}^k = \frac{(x_{n+1}, y_k)}{\|y_k\|^2}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Согласно методу математической индукции, искомая ортогональная система $\{y_n\}$ построена. Метод, с помощью которого она построена, называется *методом* или *процессом ортогонализации*.

5.3. Гильбертовы пространства. Как и в теории линейных нормированных пространств, в теории пространств со скалярным произведением особую роль играют полные пространства.

Определение 1. Пространство со скалярным произведением, которое является полным относительно нормы, порожденной этим скалярным произведением, называется *гильбертовым пространством*.

Гильбертово пространство может быть как действительным, так и комплексным. Любое конечномерное пространство над полем действительных или комплексных чисел, в котором введено скалярное произведение, является полным. Обычно такие пространства называют евклидовыми, а гильбертовыми называют полные бесконечномерные евклидовы пространства. В общем случае их обозначают буквой H с разными индексами.

Определение 2. Два евклидовых пространства E_1 и E_2 называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : E_1 \to E_2$ линейных пространств E_1 и E_2 такой, что

$$(f(x), f(y))_2 = (x, y)_1 \quad \forall x, y \in E_1,$$

где $(\ ,\ )_1$ и $(\ ,\ )_2$ — скалярные произведения в E_1 и соответственно в E_2.

Определение 3. Гильбертово пространство H называется *пополнением евклидова пространства* E, если в H существует подпространство E', которое изоморфно пространству E и плотно в пространстве H.

Теорема. *Любое евклидово пространство имеет пополнение.*

Доказательство. Любое евклидово пространство E является нормированным пространством. Ранее было показано, что любое нормированное пространство E имеет пополнение, и этим пополнением является пространство E^*, элементами которого являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей элементов из E.

Через E' обозначим множество классов фундаментальных последовательностей, среди которых есть стационарная последовательность. Тогда каждому $x \in E$ ставится в соответствие класс $x' \in E'$ такой, что он содержит последовательность $x, x, x, \ldots$, причем, по определению, $\|x'\|_* = \|x\|$. Было доказано, что E' плотно в E^*, т.е. что для любого $x^* \in E^*$ существует последовательность элементов $x'_n \in E'$ таких, что $x'_n \to x^*$ при $n \to \infty$.

Для любой пары элементов x^* и y^* из E^* скалярное произведение введем равенством

$$(x^*, y^*)_* = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n), \tag{1}$$

где $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$.

Этот предел существует, так как

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \leqslant \|x_m - x_n\| \cdot \|y_m\| + \|x_n\|\|y_m - y_n\|$$

для любых m и n, поэтому числовая последовательность (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$, фундаментальная и, следовательно, имеет предел.

Легко проверить, что предел (1) не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$ и что функция $(x^*, y^*)_*$ на $E^* \times E^*$ обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Важными примерами гильбертовых пространств является пространство l_2 числовых последовательностей и пространство $L_2(\Delta)$, где Δ — некоторый промежуток. Напомним, что $L_2(\Delta)$ — это пополнение евклидова пространства $CL_2(\Delta)$.

5.4. Ряды Фурье. Пусть в евклидовом пространстве E задана некоторая ортонормированная система

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \tag{1}$$

В общем случае эта система может быть как конечной, так и бесконечной.

Конечномерные евклидовы пространства E изучаются в линейной алгебре. Мы же будем рассматривать бесконечномерные пространства. В любом таком пространстве E существует счетная линейно независимая система, из которой процессом ортогонализации можно получить счетную ортонормированную систему.

Определение 1. Пусть в евклидовом пространстве E задана ортонормированная система (1). Тогда для любого $x \in E$ числа

$$a_k = (x, e_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

называются *коэффициентами Фурье элемента* x *по ортонормированной системе* (1), а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ называется *рядом Фурье элемента* x по этой системе.

Теорема 1. *Если* a_k, $k \in \mathbb{N}$, *— коэффициенты Фурье элемента* $x \in E$ *по ортонормированной системе, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ *сходится и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{2}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2, \tag{3}$$

и поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, ряд с неотрицательными членами $|a_k|^2$ сходится, и выполняется неравенство (2).

Неравенство (2) называется *неравенством Бесселя.*

Из равенства (3), справедливого для любого $n \in \mathbb{N}$, следует, что *ряд Фурье элемента* $x \in E$ *сходится к* x, *т.е.*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|x\|^2. \tag{4}$$

Это равенство называется *равенством Парсеваля–Стеклова.*

Определение 2. Ортонормированная система (1) элементов пространства E называется *замкнутой в смысле Стеклова*, если для любого $x \in E$ выполняется равенство (4).

Таким образом, *для того чтобы любой элемент евклидова пространства разлагался в ряд Фурье по ортонормированной системе, необходимо и достаточно, чтобы эта система была замкнутой в смысле Стеклова.*

Докажем теперь так называемое *минимальное свойство коэффициентов Фурье*. А именно, докажем, что

$$\inf_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|, \tag{5}$$

где a_k — коэффициенты Фурье элемента $x \in E$ по ортонормированной системе (1), а точная нижняя грань берется по всем линейным комбинациям элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ системы (1).

Легко вычисляется, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - \alpha_k|^2.$$

Отсюда следует, что минимум этого выражения достигается, когда $\alpha_k = a_k$, что и доказывает свойство (5).

Напомним, что система элементов нормированного пространства X называется полной в X, если ее линейная оболочка плотна в X.

Теорема 2. *Если ортонормированная система (1) полна в евклидовом пространстве E, то любой элемент $x \in E$ разлагается в ряд Фурье по этой системе.*

Доказательство. Так как система (1) полна в нормированном пространстве E, то для любого $x \in E$ выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_{N_\varepsilon} : \quad \left\| x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Отсюда и из минимального свойства коэффициентов Фурье $a_k = (x, e_k)$ следует, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon$$

и, в силу равенства (3),

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon.$$

Таким образом, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. Теорема 2 доказана.

До сих пор евклидово пространство E могло быть неполным. Докажем несколько утверждений, когда E полное, т.е. когда E является гильбертовым пространством H.

Теорема 3. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ *сходится, то для любой ортонормированной системы* (1) *в гильбертовом пространстве* H *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ *сходится и является рядом Фурье некоторого элемента* $x \in H$.

Доказательство. Из равенства

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2,$$

справедливого для любых n и p, следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ удовлетворяет условию Коши. В силу полноты пространства H этот ряд сходится к некоторому элементу $x \in H$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k.$$

Из непрерывности скалярного произведения следует, что $a_k = (x, e_k)$. Действительно,

$$(x, e_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_k \right) = a_k.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *В гильбертовом пространстве* H *ортонормированная система* (1) *полна тогда и только тогда, когда в* H *только ноль ортогонален всем элементам этой системы.*

Доказательство. Очевидно, если система (1) полна в H, то для любого $x \in H$ выполняется равенство Парсеваля–Стеклова. Поэтому если $(x, e_k) = 0 \quad \forall k$, то $x = 0$.

Пусть теперь система (1) такая, что в H только ноль ортогонален всем e_k. Выберем некоторое $x \in H$ и покажем, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \tag{6}$$

является рядом Фурье элемента x, то он сходится к x.

Из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, и поэтому, согласно теореме 3, ряд (6) сходится к некоторому элементу x_0, для которого ряд (6) является рядом Фурье. Следовательно, $(x - x_0, e_k) = 0 \quad \forall k$, но тогда $x - x_0 = 0$. Теорема 4 доказана.

Замечание. В теореме 4 полнота системы (1) в пространстве H понимается как полнота этой системы в нормированном пространстве. Во многих учебниках для ортонормированных систем полнота определяется иначе. Именно, ортонормированная система называется *полной* в евклидовом пространстве E, если в E только ноль ортогонален всем элементам этой системы. Теорема 4 показывает, что оба понятия полноты ортонормированной системы в гильбертовом пространстве совпадают.

5.5. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Напомним, что нормированное пространство X называется *сепарабельным*, если в X существует полная система из счетного числа элементов. Вообще говоря, пространство X может быть как конечномерным, так и бесконечномерным. Обычно под сепарабельными понимают бесконечномерные пространства.

Последовательность $\{e_k\}$ элементов нормированного пространства X называется *базисом в* X, если для любого $x \in X$ существует единственная последовательность чисел λ_k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k.$$

Теорема 1. *Во всяком сепарабельном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Поскольку пространство E сепарабельное, то в нем существует полная линейно независимая система, состоящая из счетного числа элементов: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Из этой системы процессом ортогонализации получим ортонормированную систему $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Очевидно, она тоже будет полной в пространстве E, и поэтому любой элемент $x \in E$ разлагается в ряд Фурье по этой системе. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Любое сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство H изоморфно пространству l_2 числовых последовательностей.*

Доказательство. Согласно теореме 1, в H существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Тогда каждому элементу $x \in H$ поставим в соответствие последовательность $\{a_k\}$ его коэффициентов Фурье по этой системе. Очевидно, $\{a_k\} \in l_2$.

Из теоремы 3 предыдущего пункта следует, что если $\{a_k\} \in l_2$, то a_k, $k \in \mathbb{N}$ являются коэффициентами Фурье некоторого элемента из H.

Следовательно, между элементами пространств H и l_2 можно установить взаимно однозначное соответствие. Очевидно, если $x \sim \{a_k\}$, $y \sim \{b_k\}$, то $x + y \sim \{a_k + b_k\}$ и $\alpha x \sim \{\alpha s_k\}$ для любого числа α. Кроме того,

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2, \quad \|y\| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2,$$

а из непрерывности скалярного произведения следует, что

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

Теорема 2 доказана.

Очевидно, пространство l_2 является сепарабельным, поэтому из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть H и H' — два сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространства. Согласно теореме 1, в H и H' существуют ортонормированные базисы $\{e_k\}$ и $\{e'_k\}$. Тогда каждому элементу $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ поставим в соответствие элемент $x' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e'_k$. Легко видеть, что это соответствие является изоморфизмом гильбертовых пространств H и H'. Теорема 3 доказана.

Из доказанных теорем следует, что если ортонормированная последовательность $\{e_k\}$ является базисом в евклидовом пространстве E, то его пополнением является гильбертово пространство, элементами которого являются всевозможные ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, у которых $\{a_k\} \in l_2$, и в котором скалярное произведение определяется следующим образом: если

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k,$$

то

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

5.6. Ортогональные проекции. Пусть L — некоторое линейное подпространство евклидова пространства E.

Определение 1. Элемент $y_0 \in L$ называется *ортогональной проекцией элемента* $x_0 \in E$ *в подпространство* L, если

$$(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in L. \tag{1}$$

Очевидно, любой элемент $x \in E$ может иметь только одну проекцию на данное подпространство L. Действительно, пусть

$$(x - y_1, y) = 0, \quad (x - y_2, y) = 0 \quad \forall y.$$

Тогда

$$\|y_1 - y_2\|^2 = (y_1 - y_2, y_1 - x + x - y_2) = 0$$

и, следовательно, $y_1 = y_2$.

Теорема 1. *Для того чтобы элемент* $y_0 \in L$ *был ортогональной проекцией элемента* $x_0 \in E$ *в подпространство* L, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|. \tag{2}$$

Доказательство. Если y_0 удовлетворяет условию (1), то, очевидно,

$$\|x_0 - y\|^2 = ((x_0 - y_0) + (y_0 - y), (x_0 - y_0) + (y_0 - y)) = \\ = \|x_0 - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2$$

для любого $y \in L$, и поэтому выполняется условие (2).

Пусть теперь выполняется условие (2). Рассмотрим числовую функцию

$$f(t) = \|x_0 - y_0 + ty\|^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

где y — произвольный элемент подпространства L.

Если пространство E действительное, то

$$f(t) = \|x_0 - y_0\|^2 + 2t(x_0 - y_0, y) + t^2\|y\|^2.$$

А так как эта функция наименьшее значение принимает при $t = 0$, то $f'(0) = 0$, и поэтому

$$(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in L.$$

Если же пространство E комплексное, то

$$f(t) = \|x_0 - y_0\|^2 + 2t\mathrm{Re}(x_0 - y_0, y) + t^2\|y\|^2,$$

и поэтому

$$\mathrm{Re}(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in L.$$

Аналогично, если рассмотрим функцию

$$f_1(t) = \|x_0 - y_0 + ity\|^2,$$

то получим

$$\mathrm{Im}(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in L.$$

Следовательно, и в этом случае выполняется условие (1). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если подпространство L евклидова пространства E полное, то у любого элемента $x \in E$ существует ортогональная проекция на подпространство L.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что нужно доказать, что

$$\forall x_0 \in E \quad \exists y_0 \in L: \quad \|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|.$$

Выберем некоторое $x_0 \in E$ и положим

$$d = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|^2.$$

Тогда существует последовательность $\{y_n\}$ элементов из L такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \|x_0 - y_n\|^2 = d. \tag{3}$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальная.

Легко проверяется, что

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4\left\|x_0 - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2 \tag{4}$$

для любых n и m. А так как $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in L$, то

$$\left\|x_0 - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right\|^2 \geqslant d,$$

и поэтому

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|x_0 - y_n\|^2 + 2\|x_0 - y_m\|^2 - 4d.$$

Из условия (3) следует, что

$$\forall \varepsilon^2 \quad \exists N: \quad \forall n \geqslant N \quad \|x_0 - y_n\|^2 < d + \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Тогда из (4) получаем:

$$\|y_n - y_m\|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall n, m \geqslant N.$$

Так как пространство L полное, то существует элемент $y_0 \in L$ такой, что $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Из непрерывности нормы следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \|x_0 - y_n\| = \|x_0 - y_0\|.$$

Теорема 2 доказана.

5.7. Общий вид линейного функционала. Пусть E — евклидово пространство (действительное или комплексное).

Лемма 1. *Для любого заданного элемента $a \in E$ функционал*

$$f(x) = (x, a), \quad x \in E, \tag{1}$$

является линейным и ограниченным, причем

$$\|f\| = \|a\|.$$

Доказательство. Линейность очевидна. Ограниченность следует из неравенства

$$|f(x)| \leqslant \|a\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E.$$

А так как $f(a) = \|a\|^2$, то $\|f\| = \|a\|$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если функционал f имеет представление вида* (1)*, то элемент a определен однозначно.*

Действительно, пусть

$$f(x) = (x, a) \quad \text{и} \quad f(x) = (x, b) \quad \forall x \in E,$$

тогда $(x, a - b) = 0 \quad \forall x \in E$, и, в частности, $(a - b, a - b) = 0$, поэтому $a = b$.

Теорема. *Любой линейный непрерывный функционал f в гильбертовом пространстве H имеет представление вида* (1).

Доказательство. Обозначим через L ядро функционала f, т.е. множество всех $x \in H$ таких, что $f(x) = 0$. Легко видеть, что L является линейным пространством. Из непрерывности функционала f следует, что множество L замкнуто. Действительно, если $x_n \in L$ и $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

А так как пространство H полное, то пространство L тоже полное.

Если $L = H$, т.е. $f(x) = 0 \quad \forall x \in H$, то, очевидно,

$$f(x) = (0, x) \quad \forall x \in H.$$

Пусть $L \neq H$, т.е. существует элемент $x_0 \in H$ такой, что $f(x_0) \neq 0$. Через y_0 обозначим ортогональную проекцию элемента x_0 в подпространство L и положим

$$z_0 = x_0 - y_0.$$

Тогда $f(z_0) = f(x_0) \neq 0$ и $(z_0, y) = 0 \; \forall y \in L$.

Так как

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0\right) = 0 \quad \forall x \in H,$$

то
$$\forall x \in H \quad x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0 \in L,$$
и поэтому
$$\left(x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0, z_0\right) = 0 \quad \forall x \in H.$$

Следовательно,
$$(x, z_0) = f(x) \frac{\|z_0\|^2}{f(z_0)}. \tag{2}$$

Заметим, что так как $f(z_0) \neq 0$, то $\|z_0\| \neq 0$, и поэтому из (2) получаем
$$f(x) = (x, a),$$
где $a = \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$. Теорема доказана.

Отображения любого линейного нормированного пространства над полем действительных (или комплексных) чисел в множество действительных (соответственно комплексных) чисел обычно называются *функционалами*. Множество всех линейных непрерывных функционалов, определенных на линейном нормированном пространстве X, с естественными операциями сложения двух функционалов и умножения функционала на число является линейным пространством, которое обозначается X^* и называется *сопряженным к X пространством.*

Из доказанных выше утверждений следует, что *любое гильбертово пространство H и сопряженное пространство H^* изоморфны.*

§ 6. Обобщенные функции

6.1. Введение. В п. 5.1 главы 15 на эвристическом уровне было показано, что для полной характеристики аппарата, которому соответствует инвариантный относительно сдвигов линейный оператор A, достаточно знать отклик $E(t)$ этого аппарата на так называемое единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ в момент времени $t = 0$. А именно, было показано, что отклик линейного оператора A на входное воздействие $f(t)$ равен свертке функций $f(t)$ и $E(t)$:
$$Af = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) E(t - \tau)\, d\tau.$$

Напомним, что при выводе этой формулы единичный импульс $\delta(t)$ понимался как предел единичных импульсов длительности h:

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1/h, & \text{если } 0 \leqslant t < h, \\ 0, & \text{если } t \geqslant h, \end{cases}$$

при $h \to 0$, и считалось, что отклик $E(t)$ оператора A на импульс $\delta(t)$ равен пределу откликов $E_h(t)$ на единичные импульсы $\delta_h(t)$ при $h \to 0$. А так как единичный импульс $\delta(t)$ не может быть обычной функцией точки, то необходимо придать точный математический смысл предельным переходам: $\delta_h(t) \to \delta(t)$ и $E_h(t) \to E(t)$ при $h \to 0$, да и самому понятию "единичный импульс $\delta(t)$".

Один из подходов к решению этих вопросов состоит в принципиальном расширении представления о функциях. Он исходит из того, что в природе объекты наблюдения обычно характеризуются их взаимодействием с другими объектами, причем для этого достаточно некоторого набора так называемых "пробных" объектов или приборов. Так и функцию можно характеризовать не значениями в отдельных точках, а как некоторый объект, который определенным образом действует на заданное семейство "пробных" функций.

Например, каждая непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ на множестве $\overset{\circ}{C}$ финитных непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $\varphi(x)$ порождает линейный функционал, который каждой функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}$ ставит в соответствие число

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Легко видеть, что если непрерывные функции f и g порождают равные функционалы, т.е. если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C},$$

то $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Значение функционала (1) можно трактовать как меру взаимодействия функции f и "пробной" функции φ. А так как значения этого взаимодействия однозначно определяют функцию f, то вместо того, чтобы задавать значения f в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, можно задавать значения функционала (1) на "пробных" функциях φ.

На множестве функций $\varphi \in \overset{\circ}{C}$, кроме функционалов вида (1), есть и другие линейные функционалы. Например, таким является функционал, обозначаемый δ, который каждой функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}$ ставит в соответствие число $\varphi(0)$, т.е. задается равенством

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \overset{\circ}{C}. \tag{2}$$

Ниже будет показано, что этот функционал не может быть задан формулой вида (1) и в этом смысле не порождается никакой непрерывной (и даже локально интегрируемой) на $\mathbb{R}$ функцией.

Формула (2) определяет так называемую δ-функцию, которую впервые ввел в науку в конце 20-х годов П. Дирак как функцию, обладающую следующими свойствами:

$$\delta(x) = 0 \quad \forall\, x \neq 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in C.$$

Сразу же было показано, что с математической точки зрения это определение некорректное. Конечно, и сам П. Дирак понимал, что δ-функция не является функцией в классическом смысле и что она действует как некоторый оператор. Однако потребовались усилия многих математиков, чтобы найти корректное определение δ-функции и ее производных и затем построить теорию *обобщенных функций* как линейных непрерывных функционалов на некотором множестве достаточно "хороших" так называемых "основных функций".

6.2. Пространство D. Рассмотрим множество $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, заданных на $\mathbb{R}$ и принимающих комплексные значения. Это множество с естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число является линейным пространством. В этом пространстве введем понятие сходимости.

Определение 1. Последовательность функций $\varphi_k(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, называется *сходящейся к функции* $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$, если

1. $\exists\,[a;b]: \quad \operatorname{sup} \varphi_k \subset [a;b] \quad \forall\, k;$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi_k^{(l)}(x) - \varphi^{(l)}(x)\right| = 0 \quad \forall\, l = 0, 1, 2, \ldots$

Последовательность функций из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ называется *сходящейся*, если существует функция из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$, к которой она сходится.

Определение 2. Линейное пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ с введенным понятием сходимости называется *пространством D основных функций*.

Если последовательность функций $\varphi_k \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ сходится к функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ в смысле определения 1, то будем говорить, что *последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится в D к функции φ*, и писать:

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{в } D \text{ при } k \to \infty.$$

Очевидно, если $\operatorname{sup}\varphi_k \subset [a;b]$ $\forall\, k$ и $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$, то и $\operatorname{sup}\varphi \subset [a;b]$.

Легко видеть, что *пространство D является полным относительно введенной сходимости.* Точнее, имеет место следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность функций из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$. Тогда если*

1. $\exists\, [a;b]: \quad \operatorname{sup}\varphi_k \subset [a;b] \quad \forall\, k;$

2. *для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\{\varphi_k^{(l)}\}$ фундаментальна по норме $C(\mathbb{R})$,*

то существует функция $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ такая, что

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{в } D \text{ при } k \to \infty.$$

Доказательство. Действительно, пусть фундаментальные последовательности $\{\varphi_k\}$ и $\{\varphi_k'\}$ по норме $C(\mathbb{R})$ сходятся к некоторым функциям φ и ψ. Тогда из равенства

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(0) + \int\limits_0^x \varphi_k'(t)\,dt$$

в пределе при $k \to \infty$ получаем равенство

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int\limits_0^x \psi(t)\,dt,$$

из которого следует, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема и $\varphi'(x) = \psi(x)$. Аналогично доказывается, что функция $\varphi'(x)$ тоже дифференцируема и $\varphi''(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k''(x)$. Поступая так и далее, получаем, что $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема и $\varphi_k \to \varphi$ в D при $k \to \infty$. Лемма доказана.

Очевидно, линейные операции в $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ непрерывны относительно введенной сходимости, т.е. если $\varphi_k \to \varphi$ и $\psi_k \to \psi$ в D при $k \to \infty$, то

$$\alpha\varphi_k + \beta\psi_k \to \alpha\varphi + \beta\psi \text{ в } D \text{ при } k \to \infty$$

для любых чисел α и β. Кроме того, если $\lambda(x)$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, то

$$\lambda\varphi_k \to \lambda\varphi \text{ в } D \text{ при } k \to \infty.$$

Пример 1. Легко показать, что для любого $a > 0$ функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\dfrac{x^2}{x^2 - a^2}, & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant a, \end{cases}$$

график которой имеет вид «шапочки» (рис. 17.2), является финитной и бесконечно дифференцируемой. Последовательность

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x; a), \quad k \in \mathbb{N},$$

сходится к нулю в пространстве D. Последовательность

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}; a\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

тоже сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}$ вместе со всеми своими производными, т.е. удовлетворяет условию 2 из определения 1, однако не сходится к нулю в пространстве D, так как она не удовлетворяет условию 1: не существует отрезка $[a; b]$, вне которого все функции $\psi_k(x)$ равны нулю.

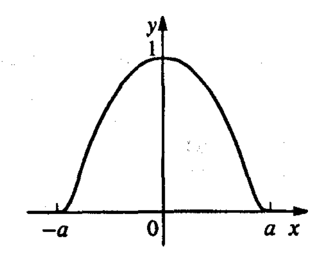


Рис. 17.2

6.3. Обобщенные функции. На пространстве D основных функций рассмотрим линейные непрерывные функционалы. Значение функционала f на функции $\varphi \in D$ будем обозначать (f, φ).

Напомним, функционал f, определенный на D, называется *линейным*, если

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi)$$

для любых чисел α, β и любых φ и ψ из D.

Линейный функционал f называется *непрерывным*, если он удовлетворяет условию: если $\varphi_k \to 0$ в D, то $(f, \varphi_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Определение 1. Любой линейный непрерывный функционал на D называется *обобщенной функцией*.

В множестве обобщенных функций на D естественным образом вводятся операции сложения двух функций и умножения функции на число. Именно, для любых двух функций f и g и любых чисел α и β через $\alpha f + \beta g$ обозначается функционал, который на любую функцию $\varphi \in D$ действует по формуле

$$(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi).$$

Легко видеть, что так определенный функционал $\alpha f + \beta g$ будет линейным и непрерывным, т.е. будет обобщенной функцией на D. (Докажите это утверждение в качестве упражнения.)

Таким образом, *множество обобщенных функций на D с естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число является линейным пространством.* Это линейное пространство будем обозначать D'. Оно является пространством, сопряженным к пространству D.

Лемма 1. *Для любой локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f функционал*

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in D, \tag{1}$$

является обобщенной функцией.

Доказательство. Линейность функционала (1) очевидна, докажем его непрерывность.

Пусть $\varphi_k \to 0$ при $k \to \infty$, и пусть $\sup \varphi_k \subset [a; b]$ $\forall k$. Тогда

$$|(f, \varphi_k)| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)| \cdot |\varphi_k(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \cdot \sup_x |\varphi_k(x)| \to 0$$

при $k \to 0$. Лемма 1 доказана.

Определение 2. Обобщенная функция называется *регулярной*, если она имеет представление вида (1) с некоторой локально интегрируемой функцией f. В противном случае обобщенная функция называется *сингулярной*.

Лемма 2. *Функционал δ, определенный формулой*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \qquad \varphi \in D, \tag{2}$$

является сингулярной обобщенной функцией.

Доказательство. Линейность и непрерывность функционала (2) очевидна. Докажем, что он не может быть представлен в виде (1).

Допустим, что существует локально интегрируемая функция f такая, что

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Вместо $\varphi(x)$ подставим функцию $\varphi(x;a)$, рассмотренную в предыдущем пункте. Тогда

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x;a)\,dx\right| = \left|\int_{-a}^{a} f(x)e^{x^2/x^2-a^2}\,dx\right| \leqslant \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \to 0$$

при $a \to +0$. С другой стороны, согласно формуле (2),

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x;a)\,dx = \varphi(0;a) = 1.$$

Следовательно, наше допущение неверное. Лемма 2 доказана.

Определение 3. Обобщенная функция, определяемая формулой (2), называется *δ-функцией.*

Очевидно, если непрерывные функции f и g на $\mathbb{R}$ равны, то соответствующие регулярные обобщенные функции тоже равны. Справедливо и обратное утверждение: если регулярные обобщенные функции, порожденные непрерывными функциями f и g, равны, то $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Действительно, если существует точка x_0, в которой, например, $f(x_0) < g(x_0)$, то, в силу непрерывности функций f и g в точке x_0, существует $\delta > 0$ такое, что

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta).$$

Тогда если $\psi(x) = \varphi(x - x_0; \delta)$, где $\varphi(x;\delta)$ — функция "шапочка", рассмотренная в предыдущем пункте, то

$$(f,\psi) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\varphi(x-x_0;\delta)\,dx < \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)\varphi(x-x_0;\delta)\,dx = (g,\psi),$$

и поэтому регулярные обобщенные функции, порождаемые функциями f и g, являются разными.

Аналогично доказывается, что если регулярные обобщенные функции, порожденные локально интегрируемыми функциями f и g равны, то $f(x) = g(x)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$, где функции f и g непрерывны.

По аналогии с обычными функциями, обобщенную функцию f, которая действует на основные функции от переменной x, удобно

обозначать $f(x)$. Например, δ-функцию, определенную по формуле (2), обозначают $\delta(x)$, а обобщенную функцию, которая каждой функции $\varphi(x) \in D$ ставит в соответствие ее значение в точке x_0 обозначают $\delta(x - x_0)$ и пишут

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0). \tag{3}$$

Функция $\delta(x - x_0)$ называется *смещенной δ-функцией.*

Обычно регулярную обобщенную функцию отождествляют с функцией, которая ее порождает. Например, говорят об обобщенных функциях $f(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и т.д. В этом смысле множество обычных функций можно рассматривать как часть множества обобщенных функций.

Если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, локально интегрируема и $x = ay+b$, $a \neq 0$, то для любой $\varphi \in D$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(ay + b)\varphi(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi\left(\frac{x - b}{a}\right) \frac{1}{a}\,dx,$$

т.е.

$$(f(ay + b), \varphi(y)) = \left(f(x), \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x - b}{a}\right)\right). \tag{4}$$

Для любой обобщенной функции $f(x)$ из D' равенство (4) примем за определение функции $f(ay + b)$, где $a \neq 0$. Согласно этому определению,

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0),$$

что не противоречит определению (3).

6.4. Умножение обобщенных функций. Для обобщенных функций на D, кроме линейных операций, можно определить операцию умножения на бесконечно дифференцируемую функцию. Именно, для любой обобщенной функции $f(x)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\psi(x)$ произведение $\psi(x)f(x)$ определим как функционал на D, заданный равенством

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi) \quad \forall \varphi \in D. \tag{1}$$

Очевидно, что так определенный функционал ψf является линейным и непрерывным на D.

Пример 1.

$$(1 + x)\delta(x) = \delta(x). \tag{2}$$

Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$((1 + x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), (1 + x)\varphi(x)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)),$$

что и доказывает равенство (2).

Аналогично, из определения (1) следует, что

$$\psi(x)\delta(x) = \psi(0)\delta(x)$$

для любой бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции $\psi(x)$.

Возникает вопрос: нельзя ли определить умножение любых обобщенных функций? Оно должно быть ассоциативным, коммутативным и совпадать с определенным выше умножением на бесконечно дифференцируемую функцию. Известно, что такое умножение определить нельзя. Чтобы это показать, рассмотрим еще одну важную обобщенную функцию, обозначаемую $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ и называемую *конечной частью* или *главным значением интеграла от функции* $\frac{1}{x}$.

Пример 2. Через $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ обозначим функционал, который на $\varphi \in D$ действует по формуле

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx.$$

Этот функционал принимает конечное значение на любой $\varphi \in D$. Его линейность очевидна. Для доказательства его непрерывности заметим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} (\varphi'(x) + \varphi'(-x)) \ln x\,dx,$$

и поэтому

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) \ln|x|\,dx.$$

Пусть $\varphi_k \to \varphi$ в D при $k \to \infty$. Тогда, согласно определению сходимости в D, существует отрезок $[a; b]$ такой, что вне $[a; b]$ функции $\psi_k = \varphi_k - \varphi$ равны нулю. Следовательно,

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \psi_k\right) = \int\limits_a^b \psi_k'(x) \ln|x|\,dx,$$

$$\left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \psi_k\right)\right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_k'(x)| \cdot \int\limits_a^b \bigl|\ln|x|\bigr|\,dx \to 0$$

при $k \to \infty$.

Пример 3.

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1. \tag{3}$$

Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} (\varphi(x) + \varphi(-x))\,dx, = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = (1, \varphi),$$

что и доказывает равенство (3).

Вернемся к вопросу об определении произведения обобщенных функций. Из равенств

$$\left(x\delta(x)\right)\mathcal{P}\frac{1}{x} = 0 \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 0,$$

$$\delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x)$$

следует, что для функций x, $\delta(x)$ и $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ нельзя определить произведение, обладающее свойствами ассоциативности и коммутативности.

6.5. Носитель обобщенной функции. Для обобщенной функции нет смысла говорить о ее значении в точке. Однако довольно естественными являются следующие определения.

Определение 1. Обобщенные функции f и g называются *равными на открытом множестве* $G \subset \mathbb{R}$, если $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ для любой функции $\varphi \in D$, носитель которой содержится в G.

В этом случае пишут $f = g$ на G. В частности, $f = 0$ на G, если $(f, \varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in D$, $\operatorname{sup}\varphi \subset G$.

Очевидно, что δ-функция равна нулю на любом открытом множестве, не содержащем точку $x = 0$.

Определение 2. Объединение всех открытых множеств, на которых обобщенная функция f равна нулю, называется *нулевым множеством функции* f, а его дополнение до $\mathbb{R}$ называется *носителем функции* f и обозначается $\operatorname{sup} f$.

Нулевое множество любой обобщенной функции является открытым (в частности, оно может быть пустым), а носитель является замкнутым множеством. Например, нулевое множество δ-функции — это объединение интервалов $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а носитель δ-функции состоит из одной точки $x = 0$.

Очевидно, что если регулярная обобщенная функция порождается непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией f, то ее носитель совпадает с носителем функции f.

Как и для обычных функций, обобщенная функция называется *финитной*, если она имеет ограниченный носитель. Следовательно, δ-функция является финитной.

6.6. Пространство D' обобщенных функций. В линейном пространстве D' обобщенных функций на D введем так называемую *поточечную сходимость*.

Определение 1. Говорят, что последовательность обобщенных функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к обобщенной функции* f, если

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D.$$

Последовательность обобщенных функций называется *сходящейся*, если существует обобщенная функция, к которой эта последовательность сходится.

Введенная сходимость называется еще *слабой сходимостью*.

Определение 2. Линейное пространство линейных непрерывных функционалов на D, в котором введена слабая (поточечная) сходимость, называется *пространством, сопряженным к пространству* D, и обозначается D'.

Пространство D' называют еще *пространством обобщенных функций*. При этом если последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в смысле определения 1, то говорят, что f_n сходится к f в D' и пишут

$$f_n \to f \text{ в } D' \text{ при } n \to \infty.$$

Пример 1. Докажем, что последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ n, & \text{если } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{n}; \\ 0, & \text{если } x \geqslant \dfrac{1}{n}, \end{cases} \tag{1}$$

в D' сходится к δ-функции.

Каждая функция $f_n(x)$ является локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ и на D по формуле

$$(f_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D,$$

порождает регулярную обобщенную функцию. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что $(f_n, \varphi) \to \varphi(0)$ при $n \to \infty$ для любой функции $\varphi \in D$. А это следует из того, что

$$(f_n, \varphi) = \int\limits_0^{1/n} n\varphi(x)\,dx = \varphi(0) + n \int\limits_0^{1/n} (\varphi(x) - \varphi(0))\,dx,$$

где последнее слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$n \int\limits_0^{1/n} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx \leqslant \max_x |\varphi'(x)| n \int\limits_0^{1/n} x\,dx = \frac{1}{2n} \max_x |\varphi'(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, $f_n(x) \to \delta(x)$ в D' при $n \to \infty$.

Пример 2. Заметим, что последовательность функций (1) является простейшим примером так называемой *δ-образной последовательности*. Напомним, что последовательность неотрицательных функций $\psi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется *δ-образной*, если

1. $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,dx = 1 \quad \forall n;$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-h}^{h} \psi_n(x)\,dx = 1 \quad \forall h > 0.$

Докажем, что любая δ-образная последовательность функций $\psi_n(x)$ в D' при $n \to \infty$ сходится к $\delta(x)$.

Пусть $\varphi(x) \in D$. Нужно доказать, что

$$(\psi_n, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\varphi(x)\,dx \to \varphi(0)$$

при $n \to \infty$. Положим

$$M = \sup_x |\varphi(x)|, \quad M_1 = \sup_x |\varphi'(x)|.$$

Тогда

$$|(\psi_n, \varphi) - \varphi(0)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M \int\limits_{-\infty}^{-h} \psi_n(x)\,dx + 2M_1 h \int\limits_{-h}^{h} \psi_n(x)\,dx + 2M \int\limits_{h}^{+\infty} \psi_n(x)\,dx$$

для любого $h > 0$. Из свойств функций $\psi_n(x)$ следует, что при $n \to \infty$ 1-е и 3-е слагаемое стремятся к нулю, а 2-е — к $2M_1 h$. Поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \right| \leqslant 2M_1 h$$

для любого $h > 0$, что и доказывает, что

$$\psi_n(x) \to \delta(x) \text{ в } D' \text{ при } n \to \infty.$$

Пространство D' обобщенных функций оказывается полным. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть последовательность обобщенных функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, такова, что для каждой функции $\varphi \in D$ числовая последовательность (f_n, φ), $n \in \mathbb{N}$, сходится. Тогда функционал f, определяемый на D равенством*

$$(f, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi),$$

является линейным и непрерывным на D, т.е. $f \in D'$.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге В.С. Владимирова «Обобщенные функции в математической физике».

Предельный переход в D' можно использовать для построения новых обобщенных функций.

Пример 3. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } |x| > \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } |x| \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Каждая функция $f_n(x)$ порождает обобщенную функцию:

$$(f_n, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{1/n} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \int\limits_{-1/n}^{+\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in D,$$

где под интегралом стоит ограниченная функция. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx \quad \forall \varphi \in D.$$

А так как

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) \quad \forall \varphi \in D.$$

Таким образом,

$$f_n(x) \to \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \text{ в } D' \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что $f_n(x) \to \frac{1}{x}$ при $n \to \infty$ для любого $x \neq 0$. Поэтому иногда говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ в D' сходится к функции $f(x) = \frac{1}{x}$, и пишут

$$f_n(x) \to \frac{1}{x} \text{ в } D' \text{ при } n \to \infty.$$

Обобщенную функцию $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ тоже иногда обозначают просто $\frac{1}{x}$.

6.7. Дифференцирование обобщенных функций. Хорошо известно, что если функция f определена и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, то

$$(f', \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\, dx = -(f, \varphi')$$

для любой функции $\varphi \in D$.

Легко видеть, что для любой обобщенной функции $f \in D'$ функционал f', определенный равенством

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \quad \forall \varphi \in D, \tag{1}$$

является линейным и непрерывным на D, т.е. формула (1) определяет обобщенную функцию f'.

Определение 1. Для любой обобщенной функции f обобщенная функция f', определенная равенством (1), называется *производной функции* f.

Производная f' называется *производной первого порядка*. Производная n-го порядка $f^{(n)}$ определяется равенством:

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad \varphi \in D.$$

Таким образом, *обобщенные функции имеют производные любого порядка.*

Справедливы следующие свойства операции дифференцирования обобщенных функций.

1. *Операция дифференцирования линейна*, т.е. для любых обобщенных функций f и g и любых чисел α и β

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'. \tag{2}$$

Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$((\alpha f + \beta g)', \varphi) = -(\alpha f + \beta g, \varphi') =$$
$$= -\alpha(\beta, \varphi') - \beta(g, \varphi') = \alpha(f', \varphi) + \beta(g', \varphi) = (\alpha f' + \beta g', \varphi),$$

что и доказывает равенство (2).

2. *Операция дифференцирования является непрерывным оператором*, т.е. если $f_k \to f$ в D', то и $f_k' \to f'$ в D' при $k \to \infty$.

Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$(f_k', \varphi) = -(f_k, \varphi') \to -(f, \varphi') = (f', \varphi)$$

при $k \to \infty$, что и доказывает наше утверждение.

3. *Если $f \in D'$, а $\psi \in C^\infty$, то*

$$(\psi f)' = \psi' f + \psi f'. \tag{3}$$

Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$((\psi f)', \varphi) = -(\psi f, \varphi') = -(f, \psi\varphi') =$$
$$= -(f, (\psi\varphi)' - \psi'\varphi) = -(f, (\psi\varphi)') + (f, \psi'\varphi) =$$
$$= (f', \psi\varphi) + (\psi' f, \varphi) = (\psi f' + \psi' f, \varphi),$$

что и доказывает равенство (3).

Рассмотрим несколько примеров на дифференцирование обобщенных функций.

Пример 1. Найдем производную *функции Хевисайда*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Согласно определению производной,

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi'), \quad \varphi \in D.$$

А так как функция $\theta(x)$ локально интегрируема, то

$$(\theta, \varphi') = \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = -\varphi(0).$$

Следовательно, $(\theta', \varphi) = \varphi(0)$, и поэтому

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Пример 2. Найдем производную функции $f(x) = x\theta(x)$.
Дифференцируя f как произведение, находим:

$$(x\theta(x)) = \theta(x) + x\theta'(x).$$

А так как $\theta'(x) = \delta(x)$ и $x\delta(x) = 0$, то

$$(x\theta(x)) = \theta(x).$$

Пример 3. $x\delta'(x) = -\delta(x)$.
Действительно,

$$x\delta'(x) + \delta(x) = (x\delta(x))' = 0;$$

так как $x\delta(x) = 0$.

Пример 4. Функция $y = \theta(x)e^{-\lambda x}$ удовлетворяет уравнению $y' + \lambda y = \delta(x)$.

Действительно,

$$y' = e^{-\lambda x}\delta(x) - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x} = \delta(x) - \lambda y.$$

§ 7. Преобразование Фурье обобщенных функций

7.1. Пространство S основных функций и пространство S' обобщенных функций. Линейное пространство S было введено в гл. 15 в п. 4.6. Напомним, что элементами этого пространства являются бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ комплекснозначные функции, каждая из которых удовлетворяет условию: как она сама, так и ее производные любого порядка при $x \to \pm\infty$ стремятся к нулю быстрее любой степени $1/x$. Такие функции называются *быстро убывающими*.

Очевидно, любая бесконечно дифференцируемая финитная функция является элементом пространства S, т.е. $D \subset S$. Однако $S \neq D$. Например, функция $\varphi(x) = \exp(-x^2)$ принадлежит S, но не принадлежит D.

Введем в S понятие сходимости.

Определение 1. Последовательность функций $\varphi(x) \in S$ называется *сходящейся в S к функции $\varphi(x) \in S$*, если для любых целых неотрицательных k и m выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m(\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x))| = 0,$$

т.е. для любых k и m $x^m\varphi_n^{(k)}(x)$ при $n \to \infty$ сходится к $x^m\varphi^{(k)}(x)$ равномерно по x на $\mathbb{R}$.

Последовательность функций из S называется *сходящейся в S*, если она в S сходится к некоторой функции из S.

Очевидно, если последовательность функций $\varphi_n(x) \in D$ в D сходится к функции $\varphi(x)$, то $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ и в S.

Определение 2. Линейное пространство S с введенной сходимостью называется *пространством S основных функций.*

Легко видеть, что множество S' всех линейных непрерывных функционалов на S является линейным пространством относительно естественных операций сложения двух функционалов и умножения функционала на число. Как обычно, в S' вводится *поточечная* (или *слабая*) *сходимость.* Именно, говорят, что $f_n \to f$ в S' при $n \to \infty$, если

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall\varphi \in S.$$

Определение 3. Линейное пространство S' линейных непрерывных функционалов на S называется *пространством S' обобщенных функций.*

В S' аналогом регулярных обобщенных функций являются функции, которые задаются формулами вида

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in S, \tag{1}$$

где $f(x)$ — локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условию:

$$\exists k: \quad f(x) = O(x^k) \text{ при } x \to \pm\infty. \tag{2}$$

Любая такая функция называется *функцией медленного роста,* поэтому обобщенные функции из S' тоже называют *обобщенными функциями медленного роста.*

Лемма. *Любая функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, медленного роста по формуле* (1) *порождает обобщенную функцию из S'.*

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in S$ интеграл (1) сходится, так как при $x \to \pm\infty$ функция $f(x)$ может возрастать лишь как некоторая степень x, а любая функция $\varphi \in S$ убывает быстрее любой степени $1/x$. Линейность функционала (1) очевидна, докажем его непрерывность. Для этого достаточно показать, что он непрерывен в нуле.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (2), и пусть $\varphi_n(x) \to 0$ в S при $n \to \infty$. Положим

$$\|\varphi_n\|_{k+2} = \sup_x (1 + |x|^{k+2})|\varphi_n(x)|.$$

Тогда $\|\varphi_n\|_{k+2} \to 0$ при $n \to \infty$, и

$$J_{k+2}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{k+2}}\,dx < +\infty.$$

А так как

$$|(f,\varphi_n)| \leqslant \|\varphi_n\|_{k+2} J_{k+2}(f),$$

то $(f,\varphi_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

В S', кроме функционалов, порождаемых функциями медленного роста, есть и другие линейные непрерывные функционалы. Например, легко видеть, что любая абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ по формуле порождает обобщенную функцию из S'. Функцией из S' будет и δ-функция:

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in S.$$

Для обобщенных функций медленного роста можно определить операцию умножения на многочлен.

Для любой функции $f \in S'$ и любого многочлена $p(x)$ произведение pf определим как функционал, заданный равенством

$$(pf,\varphi) = (f,p\varphi) \quad \forall\varphi \in S.$$

Очевидно, что так определенный функционал pf является линейным и непрерывным на S.

Для обобщенных функций из S' производная определяется так же, как и для функций из D'. Именно, производная f' функции f определяется по формуле

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi'), \quad \varphi \in S.$$

Легко доказывается, что

1. производная любой обобщенной функции из S' является обобщенной функцией из S', и, следовательно, *любая функция* $f \in S'$ *имеет производные любого порядка*;

2. *операция дифференцирования линейна*, т.е. для любых обобщенных функций f и g и любых чисел α и β

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g';$$

3. *операция дифференцирования непрерывна*, т.е. если $f_n \to f$ в S', то и $f_n' \to f$ в S' при $n \to \infty$;

4. для любой функции $f \in S'$ и любого многочлена $p(x)$

$$(pf)' = p'f + pf'.$$

7.2. Преобразование Фурье в пространстве S быстро убывающих функций. Для любой функции $\varphi \in S$ определены прямое и обратное преобразования Фурье:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx,$$

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ix\xi} dx.$$

В главе 15 (см. п. 4.6) было доказано, что если $\varphi \in S$, то $\hat{\varphi} \in S$ и $\widetilde{\varphi} \in S$, причем справедливы формулы обращения

$$F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi \quad \forall \varphi \in S.$$

Из них сразу следует, что преобразования Фурье взаимно однозначно отображают S на S.

Докажем, что *преобразования Фурье являются линейными непрерывными отображениями S на S.*

Линейность очевидна. А для доказательства непрерывности на S достаточно показать, что они непрерывны в нуле.

Пусть $\varphi_n(x) \to 0$ в S при $n \to \infty$. Тогда

$$|\xi^k \hat{\varphi}_n^{(l)}(\xi)| = |\xi^k F[x^l \varphi_n(x)]| = |F[(x^l \varphi_n(x))^{(k)}]| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(x^l \varphi_n(x))^{(k)}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x (1+x^2)|(x^l \varphi_n(x))^{(k)}| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1+x^2)|(x^l \varphi_n(x))^{(k)}| \to 0$$

при $n \to \infty$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_\xi |\xi^k \hat{\varphi}_n^{(l)}(\xi)| = 0$$

для любых целых неотрицательных k и l. Следовательно, $\hat{\varphi}_n \to 0$ в S при $n \to \infty$.

Аналогично доказывается, что $\widetilde{\varphi}_n \to 0$ в S при $n \to \infty$.

7.3. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Можно показать, что если функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то для любой функции $\varphi \in S$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \right) \varphi(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi \right) dx,$$

и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Это равенство делает естественным следующее определение.

Определение 1. Для любой обобщенной функции $f \in S'$ функционал $\hat{f}$ такой, что

$$(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in S,$$

называется *преобразованием Фурье* или *образом Фурье функции* f, а оператор $F[f] = \hat{f}$ — *преобразованием Фурье.*

Таким образом, по определению,

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) \quad \forall \varphi \in S.$$

Аналогично, функционал $\widetilde{f}$ такой, что

$$(\widetilde{f}, \varphi) = (f, \widetilde{\varphi}) \quad \forall \varphi \in S,$$

называется *обратным преобразованием Фурье* или *прообразом Фурье функции* f, а оператор $F^{-1}[f] = \widetilde{f}$ — *обратным преобразованием Фурье.*

Пример 1. Найдем образ и прообраз Фурье δ-функции.

По определению,

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0),$$
$$(\widetilde{\delta}, \varphi) = (\delta, \widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi}(0).$$

А так как

$$\hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1, \varphi)$$

и $\widetilde{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1, \varphi)$, то

$$F[\delta] = F^{-1}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Пример 2. Найдем преобразование Фурье функции $\theta(x)$.

По определению,

$$(F[\theta],\varphi) = (\theta, F[\varphi]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Следовательно,

$$(F[\theta],\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta\to+\infty} \int_0^{\eta} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

В последнем интеграле переставим порядок интегрирования и проинтегрируем по x. Тогда

$$(F[\theta],\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) \frac{1-e^{-i\xi\eta}}{i\xi} d\xi.$$

Очевидно, последний интеграл по $\mathbb{R}$ равен сумме

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1-e^{-i\xi\eta}}{i\xi}\, d\xi + \int_0^{+\infty} \varphi(-\xi) \frac{1-e^{i\xi\eta}}{-i\xi}\, d\xi,$$

поэтому

$$(F[\theta],\varphi) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(-\xi)}{\xi}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\varphi(-\xi)}{i\xi} e^{i\xi\eta} - \frac{\varphi(\xi)}{i\xi} e^{-i\xi\eta} \right) d\xi.$$

Из теоремы Римана об осцилляции следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(\pm\xi)}{i\xi} e^{\pm i\xi\eta} d\xi = 0,$$

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_0^{1} \frac{\varphi(\pm\xi)-\varphi(0)}{i\xi} e^{\pm i\xi\eta} d\xi = 0,$$

Следовательно,

$$(F[\theta],\varphi) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(-\xi)}{\xi}\,d\xi + \\ +\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\eta\to+\infty}\left(\varphi(0)\int\limits_0^1\frac{2\sin\eta\xi}{\xi}\,d\xi\right) = \\ = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(-\xi)}{\xi}\,d\xi + \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}\varphi(0).$$

Таким образом,

$$F[\theta] = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\xi).$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}[\theta] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\xi).$$

Теорема 1. *Для любой обобщенной функции $f \in S'$ функционалы $\hat{f}$ и $\widetilde{f}$ являются линейными и непрерывными на S, т.е. $\hat{f} \in S'$ и $\widetilde{f} \in S'$. Кроме того, справедливы формулы обращения:*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Для любых функций φ и ψ из S и любых чисел α и β имеем:

$$(\hat{f},\alpha\varphi+\beta\psi) = (f,\alpha\hat{\varphi}+\beta\hat{\psi}) = \\ = \alpha(f,\hat{\varphi}) + \beta(f,\hat{\psi}) = \alpha(\hat{f},\varphi) + \beta(\hat{f},\psi).$$

Линейность функционала $\hat{f}$ доказана. Докажем непрерывность.

Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в S при $n \to \infty$. Тогда, как доказано в предыдущем пункте, и $\hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi}$ в S при $n \to \infty$. Следовательно,

$$(f,\hat{\varphi}_n) \to (f,\hat{\varphi}) \text{ при } n \to \infty,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\hat{f},\varphi_n) = (\hat{f},\varphi).$$

Таким образом, $\hat{f} \in S'$. Аналогично доказывается, что $\widetilde{f} \in S'$.

Формулы обращения для функции $f \in S'$ следуют из формул обращения для функций из S. Действительно,

$$(F^{-1}[F[f]], \varphi) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in S$. Следовательно,

$$F^{-1}[F[f]] = f.$$

Аналогично доказывается, что

$$F[F^{-1}[f]] = f.$$

Теорема 1 доказана.

Пример 3. Найдем преобразования Фурье функции $f(x) = 1$.

В примере 1 было получено, что

$$1 = \sqrt{2\pi} F[\delta], \qquad 1 = \sqrt{2\pi} F^{-1}[\delta].$$

Отсюда по формулам обращения получаем:

$$F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta, \quad F[1] = \sqrt{2\pi}\delta.$$

Теорема 2. *Преобразования Фурье являются линейными непрерывными операторами, отображающими S' на S'.*

Доказательство. Для любых функций f и g из S' и любых чисел α и β

$$(F[\alpha f + \beta g], \varphi) = (\alpha f + \beta g, F[\varphi]) =$$
$$= \alpha(f, F[\varphi]) + \beta(g, F[\varphi]) = \alpha(F[f], \varphi) + \beta(F[g], \varphi) =$$
$$= (\alpha F[f] + \beta F[g], \varphi), \quad \varphi \in S.$$

Следовательно,

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g].$$

Линейность оператора F на S' доказана. Докажем его непрерывность.

Пусть $f_n \to f$ в S'. Тогда

$$(F[f_n], \varphi) = (f_n, F[\varphi]) \to (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi)$$

при $n \to \infty$ для любой функции $\varphi \in S$. Следовательно,

$$F[f_n] \to F[f] \text{ в } S' \text{ при } n \to \infty.$$

Аналогично доказывается, что обратное преобразование Фурье тоже является линейным непрерывным оператором из S' в S'.

Из формул обращения следует, что операторы F и F^{-1} отображают S' на S'. Действительно, любой элемент $f \in S'$ является образом элемента $\widetilde{f} \in S'$ при отображении F и образом элемента $\hat{f} \in S'$ при отображении F^{-1}. Теорема 2 доказана.

Получим *формулы для преобразования Фурье от производной.*

Для любой функции $\varphi(\xi) \in S$ имеем:

$$(F[f^{(k)}], \varphi) = (f^{(k)}, F[\varphi]) = (-1)^k \left(f, \frac{d^k}{dx^k} F[\varphi]\right) =$$
$$= (f, F[(i\xi)^k \varphi(\xi)]) = (F[f], (i\xi)^k \varphi(\xi)).$$

Таким образом,

$$F[f^{(k)}] = (i\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

Аналогично доказывается формула

$$F^{-1}[f^{(k)}] = (-i\xi)^k \widetilde{f}(\xi).$$

В заключение получим *формулы для производной от преобразования Фурье.*

Для любой функции $\varphi(\xi) \in S$ имеем:

$$\left(\frac{d^k}{d\xi^k} \hat{f}(\xi), \varphi(\xi)\right) = (-1)^k (\hat{f}(\xi), \varphi^{(k)}(\xi)) =$$
$$= (-1)^k (f(x), F[\varphi^{(k)}(\xi)]) = (-1)^k (f(x), (ix)^k F[\varphi]) =$$
$$= (F[(-ix)^k f(x)], \varphi(\xi)).$$

Следовательно,

$$\frac{d^k}{d\xi^k} \hat{f}(\xi) = F[(-ix)^k f(x)].$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{d^k}{d\xi^k} \widetilde{f}(\xi) = F^{-1}[(ix)^k f(x)].$$

Полученные формулы записывают еще и так:

$$F[x^k f(x)] = i^k \frac{d^k}{d\xi^k} \hat{f}(x),$$

$$F^{-1}[x^k f(x)] = (-i)^k \frac{d^k}{d\xi^k} \widetilde{f}(x).$$

Пример 4. Найдем преобразования Фурье от функции $f(x) = x^k$, где $k \in \mathbb{N}$.

$$F[x^k] = F[x^k \cdot 1] = i^k \frac{d^k}{d\xi^k} (\sqrt{2\pi} \delta(\xi)) = \sqrt{2\pi} i^k \delta^{(k)}(\xi);$$
$$F^{-1}[x^k] = \sqrt{2\pi} (-i)^k \delta^{(k)}(\xi).$$